

1. Relativistický formalizmus častíc so spinom 0.

1.0 Čo už vieme.

- Voľná nerelativistická (bodová) častica spĺňa **Schrödingerovu rovnicu**.

$$E = \frac{p^2}{2m} \text{ prechod do QM: } \left. \begin{array}{l} E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{p} \rightarrow -i\hbar \nabla \end{array} \right\} \Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi - \frac{1}{2m} \nabla^2 \Psi = 0 \quad (1.1)$$

Kde $\Psi(\vec{x}, t) \equiv$ je vlnová funkcia predstavujúca amplitúdu pravdepodobnosti častice v bode $\vec{x}$ v čase t .

- **Rovnica kontinuity**:

$$\rho = \Psi^* \Psi, \quad \vec{j} = -\frac{i}{2m} (\Psi^* \nabla \Psi - \nabla \Psi^* \Psi) \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (1.2)$$

- Interakcia častice s vonkajším poľom elektromagnetickým poľom sa zavádza pomocou **princípu minimálnej väzby**:

$$\begin{aligned} \vec{p} &\rightarrow \vec{p} - e\vec{A} \\ E &\rightarrow E - e\varphi \end{aligned} \quad (1.3)$$

To vedie k:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[\frac{1}{2m} (-i\nabla - e\vec{A})^2 + e\varphi \right] \psi \quad (1.4)$$

- **Rozptyl na vonkajšom poli**. Amplitúda prechodu v prvom ráde poruchovej teórie:

$$S_{fi} = -i \int d^4x \quad \psi_f^*(x) V(x) \psi_i(x) \quad (1.5)$$

Kde $V(x)$ je potenciál vonkajšieho poľa.

1.1 Relativistický popis častice

Relativistická častica (s hmotnosťou m a nábojom e) je charakterizovaná:

- **4-vektorom polohy:**

$$(ct, \vec{x}) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv x^\mu \equiv x \quad (1.6)$$

- **4-hybnosťou:**

$$\left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \equiv (p^0, p^1, p^2, p^3) \equiv p^\mu \equiv p \quad (1.7)$$

4-vektory x^μ a p^μ sú elementami 4-rozmerného pseudoeuklidovského priestoru M_4 (**priestor súradníc** a **priestor hybností** oddelene).

$\Rightarrow$ **Vlastnosti M_4**

- Skalárny súčin dvoch 4-vektorov (v M_4) $A^\mu = (A^0, \vec{A})$ a $B^\mu = (B^0, \vec{B})$:

$$A \cdot B = A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B} \quad (1.8)$$

4-vektor $A^\mu = (A^0, \vec{A})$ sa nazýva **kontravariantným** 4-vektorom. Pod **kovariantným**

4-vektorom budeme rozumieť: $A_\mu = (A^0, -\vec{A})$ a pre skalárny súčin potom dostávame:

$$A \cdot B = A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu \quad (1.8b)$$

kde $g_{\mu\nu}$ je metrický tenzor:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Skalárny súčin je invariantom LG !

- Rotácie v $M_4 \equiv$ Lorentzove transformácie $\Rightarrow$ vytvárajú Lorentzovu grupu (LG).

- *Invarianty LG*

$\rightarrow$ Interval:
$$x_\mu x^\mu = c^2 t^2 - \vec{x}^2 \quad (1.10)$$

$\rightarrow$ Hmotnostný štvorec:
$$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2 \quad (1.11)$$

$\rightarrow$ Fáza:
$$p_\mu x^\mu = Et - \vec{p} \cdot \vec{x} \quad (1.12)$$

Prirodzené jednotky: $c = 1$ a $\hbar = 1$

$\rightarrow$
$$E^2 - \vec{p}^2 = m^2$$

$\rightarrow$ QM – priradenie operátorov:

$$\vec{p} \rightarrow -i\hbar\nabla \equiv -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right) \quad \text{a} \quad E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad (1.13)$$

v prirodzených jednotkách:

$$(E, \vec{p}) \rightarrow i\left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right) \equiv \partial^\mu \quad (1.14)$$

kovariantná forma operátora ∂ :
$$\partial_\mu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$$

Skrátené zápisy:

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial t} & \equiv & \partial_t \equiv \partial_0 \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial x^3} & \equiv & \partial_z \equiv \partial_3 \end{array} \quad (1.15)$$

1.2 Kleinova - Gordonova rovnica. Pojem antičastice

Majme relativistickú časticu s nábojom e , hmotnosťou m a hybnosťou $\vec{p}$, vzťah pre energiu je: $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$. Tak, ako v QM, zameníme E a $\vec{p}$ operátormi:

$$(E, \vec{p}) \rightarrow (i\partial_t, -i\nabla),$$

zo vzťahu pre energiu dostaneme **Kleinovu-Gordonovu** (KG) rovnicu:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi + \nabla^2 \varphi &= m^2 \varphi \\ \text{resp.} & \\ (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

kde

$\partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - \nabla^2$ je D'Alembertov operátor a $\varphi(t, \vec{r})$ je komplexná funkcia, od ktorej očakávame, že modul jej kvadrátu $|\varphi|^2$ bude hustotou pravdepodobnosti výskytu častice.

Riešenie pre voľnú časticu s hybnosťou $\vec{p}$:

$$\varphi(t, \vec{x}) = N \cdot e^{-i(Et - \vec{p}\vec{x})} = N \cdot e^{-ipx} \tag{2.2}$$

Kde

$E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ sú vlastné hodnoty energie,

A je normovacia konštanta: $|\varphi|^2 = |N|^2$ je hustota častíc.

Problém:

Čo sebou predstavuje riešenie $E = -\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} < 0$? Toto riešenie nemôžeme zavrhnúť, lebo systém stavov by nebol úplný.

Rovnica kontinuity (RK).

Z KG rovnice nasledovnou úpravou: $-i\varphi^* \cdot KG + i\varphi \cdot KG^*$

získavame:

$$\partial_t \underbrace{\left[i(\varphi^* \partial_t \varphi - \varphi \partial_t \varphi^*) \right]}_{\rho=j_0} + \nabla \cdot \underbrace{\left[i(\varphi^* \nabla \varphi - \varphi \nabla \varphi^*) \right]}_{\vec{j}} = 0$$

teda

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{j} \equiv \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (2.3)$$

kde j^μ je 4-vektor prúdovej hustoty spojený s riešením $\varphi(x)$.

Aplikácia RK na riešenie pre voľnú časticu s hybnosťou $\vec{p}$ dáva:

$$j^\mu = 2|N|^2 p^\mu \quad (2.4)$$

Normovanie. Jedno z možných normovaní je normovanie **na 1 časticu v objemu V** .

$$\varphi(t, \vec{x}) = N \cdot e^{-ipx} = \frac{1}{\sqrt{2E \cdot V}} e^{-ipx} \quad (2.5)$$

Použijúc výraz (2.4) pre prúdovú hustotu, dostávame:

$$\int_V d^3 \vec{x} \rho(t, \vec{x}) = \int_V d^3 \vec{x} 2|N|^2 E = 2|N|^2 EV = 1 \Rightarrow N = \frac{1}{\sqrt{2EV}}$$

Pre riešenie so zápornou energiou ($E = -\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} (= p^0) < 0$) máme $\rho < 0$! Teda zápornú pravdepodobnosť výskytu. Predpokladajme, že častica má náboj $-e$ a urobme zámenu:

$$j^\mu \rightarrow -e \cdot j^\mu$$

V ďalšom budeme pod 4-vektorom prúdovej hustoty chápať:

$$j^\mu = -ie(\varphi^* \partial^\mu \varphi - \varphi \partial^\mu \varphi^*) \quad (2.6)$$

Interpretácia riešenia s $E < 0$ (Pauli a Weiskopf).

Pre voľnú časticu s hybnosťou $\vec{p}$ energiou $E (>0)$ a nábojom $-e$ máme:

$$j^\mu = -e|N|^2 p^\mu = -e|N|^2 (E, \vec{p}) \quad (2.7)$$

pre antičasticu s hybnosťou $\vec{p}$ energiou $E (>0)$ a nábojom e máme:

$$j^\mu = e|N|^2 p^\mu = -e|N|^2 (-E, -\vec{p}) \quad (2.7)$$

Teda prúdová hustota pre antičasticu s daným $\vec{p}$ a $E (>0)$ sa zhoduje s prúdovou hustotou pre časticu s hybnosťou $-\vec{p}$ energiou $-E$.

Interpretácia: Emisia **antičastice s energiou E** nejakým systémom je ekvivalentná **absorpcii častice s energiou $-E$** týmto systémom.

$$\begin{array}{ccc} \uparrow (\text{antičastica}) & & | (\text{častica}) \\ \equiv & & \\ | \quad E > 0 & & \downarrow \quad E < 0 \end{array} \quad \uparrow \text{čas}$$

Ináč: riešenie pre časticu s $E < 0$ pohybujúce sa v čase dozadu popisujú antičastice s $E > 0$ pohybujúce sa v čase dopredu.

Príčina: faktor e^{-iEt} popisujúci evolúciu stacionárneho stavu systému je možné písať nasledovne:

$$e^{-iEt} = e^{-i(-E)(-t)}$$

1.3 Nerelativistická poruchová teória

Uvažujme, v rámci QM-prístupu, voľnú časticu uzavretú v objeme. Stavy častice sú dané riešením Schrödingerovej rovnice (SchR):

$$\begin{aligned} H_0 \varphi_n &= E_n \varphi_n \quad \text{pritom} \quad \int \varphi_m^*(x) \cdot \varphi_n dx = \delta_{mn} \\ \varphi(x) &= \varphi(\vec{x}, t) = \varphi_n(\vec{x}) \cdot e^{-iE_n t} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ak častica sa pohybuje v nejakom silovom polí ($V(\vec{x}, t)$), potom je treba riešiť časovú SchR:

$$i \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} = (H_0 + V(x)) \psi(x) \quad (3.2)$$

Keďže $\{\varphi_n\}$ je úplný systém funkcií riešenie rovnice (3.2) je možné hľadať v tvare:

$$\psi(\vec{x}, t) = \sum_n a_n(t) \cdot \varphi_n(\vec{x}) \cdot e^{-iE_n t} \quad (3.3)$$

Aplikujúc $\int d^3 \vec{x} \cdot \varphi_f^*(\vec{x}) \cdot$ na (3.2) a vyjadriac ψ prostredníctvom (3.3) dostávame:

$$\frac{da_f(t)}{dt} = -i \sum_n a_n(t) \cdot \int d^3 \vec{x} \varphi_f^*(\vec{x}) V(\vec{x}, t) \varphi_n(\vec{x}) \cdot e^{-i(E_n - E_f)t} \quad (3.4)$$

kde

$a_n(t)$ je amplitúda pravdepodobnosti výskytu (v čase t) častice v stave $|n\rangle$,

$V_{fn} = \int d^3 \vec{x} \varphi_f^*(\vec{x}) V(\vec{x}, t) \varphi_n(\vec{x})$ je pravdepodobnosť prechodu častice zo

stavu $|n\rangle$ do stavu $|f\rangle$.

Predpoklad: potenciál je malý a zapne sa v $t=-T/2$ a vypne sa v $t=T/2$. Pritom častica bola v stave $|i\rangle (\equiv \varphi_i)$:

$$a_k(-T/2) = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases} \quad (3.5)$$

Ak potenciál je malý a trvá krátko, potom podmienky (3.5) sú, v prvom priblížení, splnené počas celého intervalu $(-T/2, T/2)$ a zo (3.4) a (3.5) vyplýva:

$$\frac{da_f(t)}{dt} = -i \int d^3 \vec{x} \varphi_f^*(\vec{x}) V(\vec{x}, t) \varphi_i(\vec{x}) \cdot e^{-i(E_i - E_f)t} \quad (3.6)$$

Preintegrujúc (3.6) a použijúc označenie $x \equiv (t, \vec{x})$ dostávame:

$$T_{fi} = a_f(T/2) = -i \int d^4 x \varphi_f^*(x) V(x) \varphi_i(x) \quad (3.7)$$

Predpokladajme, že potenciál nezávisí od času $V(x) = V(\vec{x})$ potom

$$\begin{aligned} T_{fi} &= -i \underbrace{\int d^3 \vec{x} \varphi_f^*(\vec{x}) V(x) \varphi_i(\vec{x})}_{V_{fi}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i(E_f - E_i)t}}_{2\pi \delta(E_f - E_i)} \\ &= 2\pi \cdot V_{fi} \cdot \delta(E_f - E_i) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Fermiho pravidlo. Pravdepodobnosť prechodu zo stavu $|i\rangle$ do stavu $|f\rangle$ je daná výrazom:

$$W_{fi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|T_{fi}|^2}{T} = 2\pi |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) \quad (3.9)$$

1.4 Častica so spinom S=0 v elektromagnetickom poli.

Predpokladajme nasledovné:

- El.-magnetické pole je popísané 4-potenciálom: $A^\mu = (A^0, \vec{A})$
- častica má spin S=0, hybnosť $\vec{p}$ a náboj $-e$, napr. mezón π^- .

Z teórie el.-mag. poľa máme:

Pohyb nabitej častice v poli A^μ dostaneme z voľného pohybu zámenou:

$$p^\mu \rightarrow p^\mu + eA^\mu, \text{ resp. v QM: } i\partial \rightarrow i\partial + eA^\mu.$$

Rovnica pre pohyb nabitej častice v poli A^μ :

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\varphi = \underbrace{(ie(\partial_\mu A^\mu + A_\mu \partial^\mu) + e^2 A^2)}_{-V}\varphi \quad (4.1)$$

Prvý rád poruchovej teórie:

- Častica je na počiatku v stave φ_i a v dôsledku interakcie prechádza do stavu φ_f
- v potenciáli V zanedbávame členy $\sim e^2$.

Pre element prechodu platí:

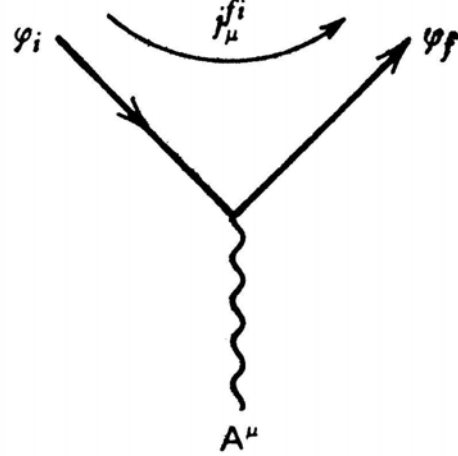
$$\begin{aligned} T_{fi} &= -i \int dx \varphi_f^*(x) V(x) \varphi_i(x) = i \int dx \varphi_f^*(x) (\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu) \varphi_i(x) \\ &= -i \int (-ie) [\varphi_f^* \partial_\mu (A^\mu \varphi_i) + \varphi_f^* (\partial_\mu \varphi_i) A^\mu] dx \\ &= -i \int dx (-ie) \underbrace{[\varphi_f^* \partial_\mu \varphi_i - \varphi_i^* \partial_\mu \varphi_f]}_{j_\mu(x)} A^\mu \\ &= -i \int dx j_\mu(x) A^\mu(x) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Kde sme využili:

$$\partial_\mu (\varphi_f^* A^\mu \varphi_i) = (\partial_\mu \varphi_f^*) A^\mu \varphi_i + \varphi_f^* \partial_\mu (A^\mu \varphi_i) \quad \text{a fakt, že } \int dx \partial_\mu (\dots) = 0 \quad (4.3)$$

Tok spojený s prechodom častice zo stavu φ_i do stavu φ_f :

$$\begin{aligned} j_\mu^{fi}(x) &= -ie[\varphi_f^*(x)\partial_\mu\varphi_i(x) - (\partial_\mu\varphi_f^*(x))\varphi_i(x)] \\ &= eN_iN_f(p_i + p_f)_\mu \cdot \exp(i(p_f - p_i)x) \end{aligned} \quad (4.4)$$



Obr. 1: Grafické znázornenie amplitúdy T_{fi} :
častica so spinom 0 sa rozptyľuje na
statickom potenciáli A^μ

Poznámka:

Je to ako v klasickej teórii poľa pre energiu prúdového vodiča v elektromagnetickom poli, platí:

$$H_{\text{int}} = \int d^3\vec{x} (\rho(\vec{x},t)\varphi(\vec{x},t) - \vec{j}(\vec{x},t) \cdot \vec{A}(\vec{x},t)) = \int d^3\vec{x} j^\mu(\vec{x},t) A_\mu(\vec{x},t) \quad (4.5)$$

Rozptyl na statickom potenciáli. Coulombov rozptyl piónu

Uvažujme prípad rozptylu na elektrostatickom potenciáli ($A^\mu(x^0, \vec{x}) = A^\mu(\vec{x})$) – pre konkrétnosť uvažujme rozptyl piónu na atómovom jadre. Pre amplitúdu rozptylu (prechod $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$) platí:

$$\begin{aligned} T_{fi} &= -i \int dx j_\mu(x) \cdot A^\mu(x) = ieN_iN_f \cdot (p_i + p_f)_\mu \cdot \int dx^0 d\vec{x} e^{i(E_i - E_f)x^0 + i(\vec{p}_i - \vec{p}_f) \cdot \vec{x}} A^\mu(\vec{x}) \\ &= ieN_iN_f \cdot 2\pi\delta(E_f - E_i) \cdot (p_i + p_f)_\mu \cdot A^\mu(\vec{q}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

kde Fourierov obraz potenciálu $A^\mu(\vec{q})$ () je daný prúdovou hustotou rozptylového centra:

$$A^\mu(\vec{q}) = -\frac{1}{|\vec{q}|^2} j^\mu(\vec{q}) \quad (4.7)$$

Poznámka. Vzt'ah (4.7) do $= \int d\vec{x} e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} A^\mu(\vec{x})$ kde $\vec{q} = \vec{P}_i - \vec{P}_f$ staneme z Maxwelllovej rovnice pre statický potenciál ($\nabla^2 A^\mu(\vec{x}) = -j^\mu(\vec{x})$), aplikovať na jej obe strany $\int d\vec{x} \exp(i\vec{q} \cdot \vec{x}) \cdot$ a preintegrovať metódou Per partes.

V prípade statického jadra s nábojom Ze

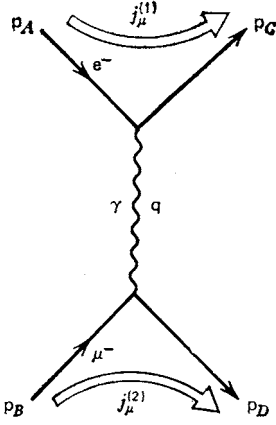
$$j^0(\vec{x}) = \rho(\vec{x}) = Ze\delta(\vec{x}) \quad \vec{j}(\vec{x}) = 0 \quad (4.8)$$

A pre amplitúdu platí:

$$T_{fi} = ieN_i N_f \cdot 2\pi\delta(E_f - E_i) \cdot (E_i + E_f) \cdot \frac{Ze}{|\vec{q}|^2} \quad (4.9)$$

Rozptyl dvoch častíc so spinom 0.

Uvažujme napr. rozptyl π - a K -mezónov (možno ich považovať za bodové častice pri nie príliš hlboko-nepružných zrážkach, t.j. ak kvadrát prenesenej hybnosti $< m_\pi^2$).



Na problém rozptylu dvoch častíc so spinom 0 sa pozeráme tak, že prvá častica sa pohybuje v poli potenciálu druhej častice. Pritom pre potenciál $A_{(2)}^\mu$ generovaný druhou časticou platí:

$$\partial_\nu \partial^\nu A_{(2)}^\mu(x) = j_{(2)}^\mu(x) \quad (4.10)$$

kde

$$j_{(2)}^\mu(x) = -e N_2 N_4 (p_2 + p_4)^\mu e^{i(p_4 - p_2)x}$$

Riešenie je:

$$A_{(2)}^\mu(x) = -\frac{1}{q^2} j_{(2)}^\mu(x), \quad q = p_4 - p_2 \quad (4.11)$$

Pre amplitúdu rozptylu π na K dostávame:

$$T_{fi} = -i \int d^4x j_\mu^{(1)}(x) A_{(2)}^\mu(x) = -i \int d^4x j_\mu^{(1)}(x) \frac{1}{q^2} j_{(2)}^\mu(x) = -i \int d^4x j_\mu^{(1)}(x) \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} j_{(2)}^\nu(x) \quad (4.12)$$

Kde

$j_\mu^{(1)}(x) (j_\mu^{(2)}(x))$ je prúdová hustota spojená s prechodom $\pi(K)$ z počiatočného do

konečného stavu ($|i\rangle \rightarrow |f\rangle$). Veličina $\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}$ je propagátor fotónu.

Ak vo vzťahu (4.12) vyjadríme $j_\mu^{(1)}(x) (j_\mu^{(2)}(x))$ pomocou (4.4) a preintegrujeme – dostaneme:

$$T_{fi} = -i N_1 N_2 N_3 N_4 \cdot (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \cdot M_{fi} \quad (4.13)$$

kde

$$-i M_{fi} = i e (p_1 + p_3)^\mu \left(-i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \right) i e (p_2 + p_4)^\nu \quad (4.14)$$

Poznámka: Je dôležité si všimnúť symetriu medzi π a K .

1.5 Vzťah medzi účinným prierezom a amplitúdou prechodu

Vzťah experimentálne meranej veličiny (účinný prierez) a veličiny danej teóriou (amplitúdy prechodu):

$$d\sigma = \frac{W_{fi}}{|\vec{v}| \rho_1 \rho_2} \cdot d\Omega \quad (5.1)$$

kde

- W_{fi} je pravdepodobnosť prechodu za jednotku času:

$$W_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{VT} = \frac{|M_{fi}|^2}{2E_1 2E_2 2E_3 2E_4 \cdot V^4} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \quad (5.2)$$

- Hustota počiatkových stavov:

$$|\vec{v}| \rho_1 \rho_2 = \frac{|\vec{v}|}{V^2} \quad (5.3)$$

- $d\Omega$ je počet konečných stavov:

$$d\Omega = \frac{V d^3 p_3}{(2\pi)^3} \frac{V d^3 p_4}{(2\pi)^3} \quad (5.4)$$

Po dosadení (5.2-4) do (5.1) dostávame:

$$d\sigma = |M_{fi}|^2 \frac{1}{|\vec{v}| 2E_1 2E_2} \cdot \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4} \cdot (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \quad (5.5)$$

Dvojčasticový fázový priestor.

V prípade 2-časticového finálneho stavu pre fázový priestor (po zahrnutí δ -funkcie) máme:

$$\begin{aligned} dLips_2(P) &= \frac{V d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{V d^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4} (2\pi)^4 \delta^4(P - p_3 - p_4) \Leftarrow \\ &\leftarrow_{\text{int } p_0} \frac{1}{(2\pi)^2} d^4 p_3 \delta(p_3^2 - m_3^2) \Theta(p_3^0) \cdot d^4 p_4 \delta(p_4^2 - m_4^2) \Theta(p_4^0) \cdot \delta^4(P - p_3 - p_4) \end{aligned} \quad (5.6)$$

kde m_3 a m_4 sú hmotnosti výstupných častíc a $P = p_1 + p_2$ je celková hybnosť vstupných častíc.

Keď preintegrujeme (5.6) cez $d^4 p_4$ a následne cez dp_3^0 dostávame:

$$dLips_2(P) = \frac{1}{(2\pi)^2} d^4 p_3 \delta(p_3^2 - m_3^2) \cdot \delta((P - p_3)^2 - m_4^2) \Theta(p_3^0) \quad (5.7)$$

$$\xrightarrow{\text{int } p_3^0} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{d^3 p_3}{2E_3} \cdot \delta((P - p_3)^2 - m_4^2)$$

Ak prejdeme do sférických súradníc ($d^3 p_3 = p^2 dp d \cos \theta d\varphi$,

$p = \sqrt{(p_3^1)^2 + (p_3^2)^2 + (p_3^3)^2}$) nakoniec dostávame:

$$dLips_2(P) = \frac{1}{(2\pi)^2} d \cos \theta d\varphi dp \frac{p^2}{2\sqrt{p^2 + m_3^2}} \cdot \delta(M^2 - 2M\sqrt{p^2 + m_3^2} + m_3^2 - m_4^2) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} d \cos \theta d\varphi \frac{\lambda^{1/2}(M^2, m_3^2, m_4^2)}{8M^2} \quad (5.8)$$

kde $\lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc$

Analogicky pre **rýchlosť rozpadu** ($A \rightarrow l + 2 + \dots + n$):

$$d\Gamma = |M_{A \rightarrow l \dots n}|^2 \frac{1}{2E_A} \cdot \frac{d^3 p_l}{(2\pi)^3 2E_l} \dots \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3 2E_n} \cdot (2\pi)^4 \delta^4(p_A - p_l - \dots - p_n) \quad (5.9)$$

V tomto prípade namiesto hustoty prúdov zraňajúcich sa častíc vystúpuje hustota rozpadajúcich sa častíc.