2. Spinorové pole. *8. 3. 2007*

2.1 Diracova rovnica

Diracova rovnica nám popisuje klasické spinorové pole, ktorého kvantami sú častice so spinom ½ - ich charakteristika : $\underbrace{x \equiv (t, \vec{x})}_{\text{4-vektor polohy}}, \underbrace{p \equiv (E.\vec{p})}_{4-\text{hybnosť}}, \underbrace{s_z(=-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})}_{\text{projekcia spinu}}, \underbrace{e}_{\text{náboj}}$

Forma DR:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) = 0 \qquad \partial_\mu \overline{\Psi}(x)(i\gamma^\mu + m) = 0 \tag{2.1}$$

kde $\Psi(x)$ je 4-komponentný spinor a $\overline{\Psi} = \Psi^+ \gamma^0$ je dirakovský združený spinor.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \qquad \partial_\mu \equiv (\partial_t, \nabla) \tag{2.2}$$

Prúdová hustota pre časticu so spinom ½ a nábojom $-e$ je daná vzťahom:

$$j^\mu(x) = -e\overline{\Psi}(x)\,\gamma^\mu\,\Psi(x) \tag{2.3}$$

A platí preň ***rovnica kontinuity***: $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$ (2.4)

Riešenie DR pre voľnú časticu s hybnosťou $\vec{p}$ a spinom ½:

$$\Psi_{\vec{p}}(x) = u(\vec{p})\exp(-ipx) \tag{2.5}$$

Kde 4-komponentný spinor $u(\vec{p})$ spĺňa rovnicu

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(\vec{p}) = 0 \tag{2.6}$$

Pre voľnú časticu s hybnosťou $\vec{p}$ má rovnica (2.6) 4 nezávislé riešenia :

2 riešenia s kladnou energiou ($p_0 = E > 0$):

$$u^{(i)}(\vec{p}) = N\begin{pmatrix} \chi^{(i)} \\ \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(i)} \end{pmatrix} \quad i = 1,2 \qquad \chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.7a}$$

Riešenia so zápornou energiou ($p_0 = -E < 0$):

$$u^{(i+2)}(\vec{p}) = N\begin{pmatrix} \dfrac{-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(i)} \\ \chi^{(i)} \end{pmatrix} \quad i = 1,2 \tag{2.7b}$$

N je normovacia konštanta (viď. Doplnok B).

Interpretácia riešenia: v stave s hybnosťou $\vec{p}$ nadobúda častica energiu $\pm E$ $\left(= \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}\right)$ ($-E$ zodpovedá antičastici), pritom v oboch prípadoch spin môže byť orientovaný v smere pohybu častice alebo proti nemu.

Poznámka o častici a antičastici.

DR má pre hybnosť $\vec{p}$ 4 riešenia - 2 s kladnou a 2 so zápornou energiou:

$$\begin{aligned}&\psi^{(s)}(x) = u^{(s)}(\vec{p})\exp(-ipx) = u^{(s)}(\vec{p})\exp\left(-i(p^0x^0 - \vec{p}\cdot\vec{x}\right) \\ &s = 1,2\ :\left(p_0 = +\sqrt{\vec{p}^2+m^2}\right)\ ,\qquad = 3,4\ :\ \left(p_0 = -\sqrt{\vec{p}^2+m^2}\right)\end{aligned} \tag{2.8}$$

Pozitrón s energiou E a hybnosťou $\vec{p}$ je popísaný jedným z riešení pre elektrón s energiou $-E$ a hybnosťou $-\vec{p}$, teda:

$$u^{(3,4)}(-\vec{p})\exp(-i(-\sqrt{\vec{p}^2+m^2}-(-\vec{p})\vec{x}) \quad \equiv \quad v^{(2,1)}(\vec{p})\exp(ipx) \tag{2.9}$$

DR pre spinor $v(\vec{p})$:

$$(\hat{p}+m)v(\vec{p}) = 0 \tag{2.10}$$

Dôvod prechodu (3,4) $\rightarrow$ (2,1): zmena hybnosti $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ vedie k zmene helicity $(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})$, chceme, aby $v^{(1)}$ predstavovala rovnakú helicitu ako $u^{(1)}$.

Vzťahy úplnosti. Normovanie na ***2E*** častíc v objeme ***V=1*** (viď. Doplnok B) dáva***:***

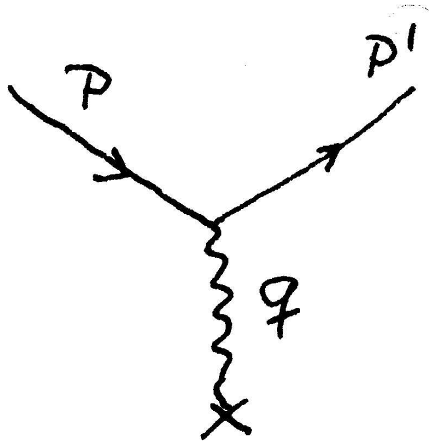
$$\sum_{s=1,2} u^{(s)}(p)\,\bar{u}^{(s)}(p) = \hat{p}+m \qquad \text{a} \qquad \sum_{s=1,2} v^{(s)}(p)\,\bar{v}^{(s)}(p) = \hat{p}-m \tag{2.11}$$

Normovanie na ***1*** časticu v objeme ***V=1*** vedie k***:***

$$\sum_{s=1,2} u^{(s)}(p)\,\bar{u}^{(s)}(p) = \frac{1}{2E}\left(\hat{p}+m\right) \ \text{ a } \ \sum_{s=1,2} v^{(s)}(p)\,\bar{v}^{(s)}(p) = \frac{1}{2E}\left(\hat{p}-m\right) \tag{2.12}$$

2.2 Rozptyl elektrónov na statickom potenciáli.

Uvažujme rozptyl elektrónu v poli statického potenciálu (napr. atómového jadra).



Obr. 1: *Rozptyl elektrónu na statickom potenciáli (1. pribl.), elektrón si vymenil s rozptylovým centrom + fotón*

Amplitúda prechodu elektrónu z počiatočného do konečného stavu je v prvom priblížení daná:

$$T_{fi} = -i\int dx\, j_\mu^{fi}(x)\cdot A^\mu(x) \quad (2.13)$$

Použijúc $j_\mu^{fi}(x) = -e\bar{u}_f\gamma^\mu u_i\, e^{-iqx}$ dostávame:

$$T_{fi} = ie\,\bar{u}_f\gamma^\mu u_i\int d^4x\, A_\mu\, e^{-iqx} = ie\bar{u}_f\gamma^\mu u_i\, A_\mu(q) \qquad (2.14)$$

kde $A_\mu(q)$ je Fourierov obraz $A_\mu(x)$. V prípade statického potenciálu $A_\mu(x)$ nezávisí od času:

$$A_\mu(q) = \int dt\, e^{-i(E_f-E_i)t}\int d^3\vec{x}\, A^\mu(x)\, e^{i\vec{q}\vec{x}} = 2\pi\delta\left(E_f - E_i\right)A_\mu(\vec{q}) \qquad (2.15)$$

Na určenie 3-rozmerného Fourierovho obrazu $A^\mu(q)$ použijeme Maxwellove rovnice:

$$\nabla^2 A^\mu(\vec{x}) = -j^\mu(\vec{x}) \qquad (2.16)$$

Čo vedie k

$$\begin{aligned} j^\mu(\vec{q}) &= \int d^3x\, j^\mu(\vec{x})e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} = \int d^3x\left(\nabla^2 A^\mu(\vec{x})\right)e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \\ \text{per partes} \Rightarrow &= \vec{q}^{\,2}\cdot\int d^3x\, A^\mu(\vec{x})e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} = \vec{q}^{\,2}\cdot A^\mu(\vec{q}) \end{aligned} \qquad (2.17)$$

Výsledok pre amplitúdu rozptylu elektrónu v prvom priblížení je

$$T_{fi} = 2\pi\delta\left(E_f - E_i\right)\cdot e\bar{u}_f\,\gamma_\mu u_i \cdot \frac{1}{|\vec{q}|^2}\cdot j^\mu(\vec{q}) \tag{2.18}$$

Prítomnosť δ–funkcie vedie k tomu, že $q_0=0$ a teda $q^2 = -|\vec{q}|^2$.

Predpokladajme, že statický potenciál je potenciál atómového jadra s nábojom ***Ze.***

Potom invariantná amplitúda e^-Ze–rozptylu je:

$$-iM = ie\bar{u}_f\gamma^\mu u_i \cdot \frac{-ig_{\mu\nu}}{\vec{q}^2}\cdot\left(-i\,j^\nu(\vec{q})\right) = ie\bar{u}_f\gamma^0 u_i\cdot\frac{-i}{\vec{q}^2}\cdot\left(-iZe\right) \tag{2.19}$$

kde

$$j^0(\vec{x}) = Ze\delta(x) \quad , \quad \vec{j}(\vec{x}) = \vec{0}$$

Porovnanie rozptylu častice so spinom 0 a ½.

Amplitúda rozptylu je v v oboch prípadoch daná tým istým vzťahom:

$$T_{fi} = -i\int dx\, j_\mu^{fi}(x)\cdot A^\mu(x)$$

Rozdiel je v štrúktúre el-mag. toku. Častice so spinom 0 interagujú s el-mag poľom výlučne prostredníctvom náboja e a štruktúra toku (prechod častice zo stavu φ_i do stavu φ_f) je

$$j_\mu^{fi}(x) = eN_iN_f\left(p_i + p_f\right)_\mu\cdot e^{-iqx} \tag{2.20}$$

V prípade častice so spinom ½ je štrukúra toku nasledovná:

$$j_\mu^{fi}(x) = -e\bar{u}_f\gamma^\mu u_i\, e^{-iqx} \tag{2.21}$$

Použijúc Gordonov rozvoj:

$$-e\bar{u}_f\gamma^\mu u_i = -e\bar{u}_f\left(\frac{\left(p_f + p_i\right)^\mu}{2m} - i\frac{\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\right)u_i \tag{2.22}$$

kde

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\right) \tag{2.23}$$

vidíme, že v prípade častice so spinom ½ je okrem interakcie prostredníctvom náboja $\sim(p_f+p_i)$ je prítomná aj interakcia zodpovedajúca členu $\sigma^{\mu\nu}q_\nu$. Tento člen popisuje interakciu prostredníctvom magnetického momentu elektrónu:

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m}\vec{\sigma} = -g\frac{e}{2m}\vec{S} \tag{2.24}$$

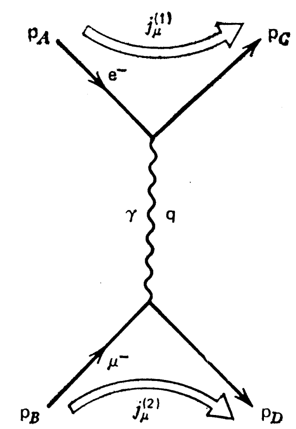
Kde $\vec{S} = \vec{\sigma}/2$ a g=2 je gyromagnetický faktor.

Teda elektrón (častica so spinom 1/2) interaguje s el-mag poľom nielen prostredníctvom náboja ale tiež prostredníctvom magnetického momentu !

Poznámka. *Pre pochopenie toho, že druhý člen v (2.22) predstavuje interakciu magnetického momentu je si treba uvedomiť:*

- $q_0 = 0$ *v dôsledku zachovania energie (* $E_i = E_f$ *)*
- *priestorová časť* $\sigma^{\mu\nu}$ *je* $\sigma^{ij} = \varepsilon^{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}$ $\quad i, j = 1,2,3$
- *brať len vrchné komponenty funkcii* $\psi^i(x)\left(= u^i(p)\exp(-ip_i x)\right)$ a $\psi^f(x)$.

Čo vieme o rozptyle – zhrnutie



Rozptyl častíc so spinom 0:

$$-iM_{fi} = ie(p_1 + p_3)^\mu \left(-i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\right) ie(p_2 + p_4)^\nu$$

Rozptyl častíc so spinom 1/2:

$$-iM_{fi} = ie\bar{u}_f \gamma^\mu u_i \cdot \frac{-i}{q^2} \cdot (-iZe) \rightarrow$$

$$= \bar{u}(k', s_1')ie\gamma^\mu u(k, s_1) \cdot \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} \cdot \bar{u}(p', s_2')ie\gamma_\nu u(p, s_2)$$

Feynmanove pravidlá

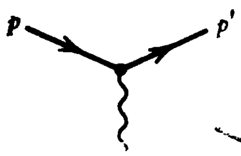
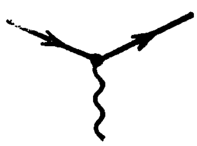
External lines

Bozon S=0 (in,out)		1
Fernion S=1/2 (in, out)		$u, \ \bar{u}$
Antifermion S=1/2 (in,out)		$\bar{v}, \ v$
		$\varepsilon_\mu, \ \varepsilon^*_\mu$

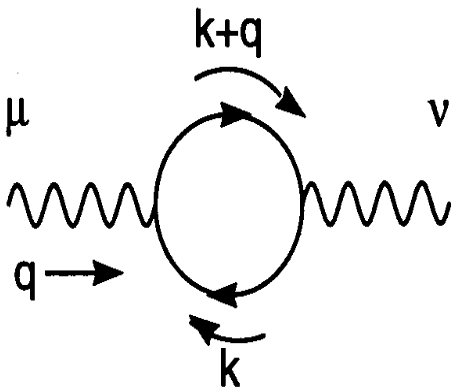
Internal lines - propagators (rule $+\varepsilon i$)

Bozon S=0		$\dfrac{i}{p^2 - m^2}$
Fermion S=1/2		$\dfrac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}$
Bozon S=1 (mass > 0)		$\dfrac{-i(g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / M^2)}{p^2 - M^2}$
Photon S=1 (Feynmann cal.)		$-\dfrac{-ig_{\mu\nu}}{p^2}$

Vertex factors

photon - spin 0 (charge -e)		$ie(p + p')^\mu$
photon - spin 1/2 (charge -e)		$ie\gamma^\mu$

Slučky v diagramoch



V prípade fermiónovej slučky je treba

- priradiť faktor (−1),
- urobiť stopu zodpovedajúcich γ–matíc
- a integrovať cez hybnosť cirkulujúcu v slučke:

$$
\begin{aligned}
F.S. &= (-1)\int d^4k\ (ie\gamma^{\mu})_{\alpha\beta}\cdot\frac{i(\hat{k}+m)_{\beta\lambda}}{k^2-m^2}\cdot(ie\gamma^{\nu})_{\lambda\delta}\cdot\frac{i(\hat{q}-\hat{k}+m)_{\delta\alpha}}{(q-k)^2-m^2} \\
&= (-1)\,i^2(ie)^2\int d^4k\ \cdot\frac{Tr\left(\gamma^{\mu}(\hat{k}+m)\gamma^{\nu}(\hat{q}-\hat{k}+m)\right)}{(k^2-m^2)\left((q-k)^2-m^2\right)}
\end{aligned}
\qquad \mathbf{(2.25)}
$$

kde

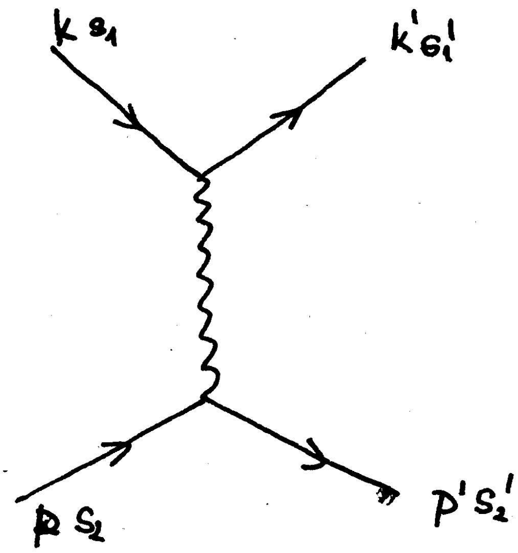
$$\hat{k}=k_{\mu}\gamma^{\mu}, \qquad \hat{q}=q_{\mu}\gamma^{\mu}$$

Opakujúce sa indexy sú sumačnými indexami.

Poznámka. Hybnosť v slučke je ohraničená iba zákonom zachovania 4-hybnosti. Keďže $q=(q-k)+k$ platí pre všetky k, musíme integrovať cez možné k .

2.3 Rozptyl $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$

Uvažujme rozptyl e^- s hybnosťou k na mióne s hybnosťou p (viď. *Obr. 2)*



Počiatočný stav: $\left|i\right\rangle = \left|ks_1, ps_2\right\rangle$

Konečný stav: $\left|f\right\rangle = \left|k's_1', p's_2'\right\rangle$

Amplitúda prechodu:

$$T_{fi} = -i\int j_\mu^{(e)}(x)\left(-\frac{1}{q^2}\right) j_{(m)}^\mu(x)dx =$$

$$= -i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k+p-k'-p')\,M \qquad (2.26)$$

Obr. 2: Rozptyl elektrónu na mióne

Pritom amplitúda ***M*** je:

$$M = -e^2\bar{u}(k',s_1')\gamma^\mu u(k,s_1)\cdot\frac{1}{q^2}\cdot\bar{u}(p',s_2')\gamma^\mu u(p,s_2) \qquad (2.27)$$

Budeme sa zaujímať o nepolarizovaný účinný prierez, t.j. budeme predpokladať, že v počiatočnom stave bude elektrón a mión s rovnakou pravdepodobnosťou nadobúdať obe hodnoty spinu a $|M|^2$ spriemerujeme cez počiatočné spinové stavy.

$$\overline{|M|^2} = \frac{e^4}{q^4}\cdot L_{(el)}^{\mu\nu}\, L_{\mu\nu}^{(mu)} \qquad (2.28)$$

Kde

$$L_{(el)}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sum_{s_1 s_1'}\bar{u}(k',s_1')\gamma^\mu u(k,s_1)\cdot\left(\bar{u}(k',s_1')\gamma^\nu u(k,s_1)\right)^* \qquad (2.29)$$

Analogický výraz platí pre $L_{\mu\nu}^{(mu)}$

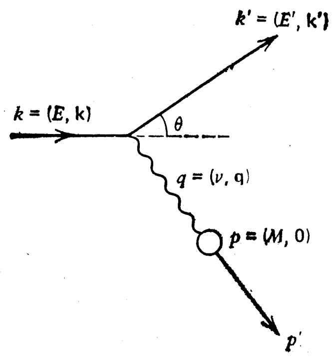
Výsledok potom je

$$\overline{|M|^2} = \frac{8e^4}{q^4}\cdot\left[(k'\cdot p')(k\cdot p) + (k'\cdot p)(k\cdot p') - m^2(p'\cdot p) - M^2(k'\cdot k) + 2m^2M^2\right] \qquad (2.30)$$

kde ***m*** (***M***) je hmotnosť elektrónu (miónu).

Rozptyl $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ v laboratórnej sústave

Uvažujme $e^-\mu^-$ rozptyl v laboratórnej sústave (LS) – ako je ukázané na *Obr.2*.



V LS je mión v kľude: $\boldsymbol{p} \equiv \left(\boldsymbol{M}, \vec{0}\right)$, poznáme pohybový stav incidentného elektrónu $\left(\boldsymbol{E}, \vec{\boldsymbol{k}}\right)$ a experimentálne energiu výstupného elektrónu E' a uhol jeho odklonu od pôvodného smeru (θ).

Obr. 3: Rozptyl ***eμ*** v laboratórnej sústave

Keď vychádzame zo všeobecnej formuly pre ***eμ***-rozptyl (3.5) a zanedbáme členy úmerné $\boldsymbol{m^2}$ ***(*** *m*≡hmotnosť elektrónu ***)*** a použijeme priblíženie:

$$\boldsymbol{q}^2 \approx -2\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}' = -2\boldsymbol{EE}'(1-\cos\boldsymbol{\theta}) = -4\boldsymbol{EE}' \cdot \sin^2\frac{\boldsymbol{\theta}}{2} \qquad (2.31)$$

A pre kvadrát modulu amplitúdy $\boldsymbol{M_{fi}}$ máme:

$$\overline{\left|\boldsymbol{M}_{fi}\right|^2} = \frac{\boldsymbol{8e}}{\boldsymbol{q}^4} 2\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{EE}'\left\{\cos^2\frac{\boldsymbol{\theta}}{2} - \frac{\boldsymbol{q}^2}{2\boldsymbol{M}^2}\sin^2\frac{\boldsymbol{\theta}}{2}\right\} \qquad (2.32)$$

Pre účinný prierez dostávame:

$$\frac{\boldsymbol{d\sigma}}{\boldsymbol{dE'd\Omega}} = \frac{(2\alpha\boldsymbol{E}')^2}{\boldsymbol{q}^4}\left\{\cos^2\frac{\boldsymbol{\theta}}{2} - \frac{\boldsymbol{q}^2}{2\boldsymbol{M}^2}\sin^2\frac{\boldsymbol{\theta}}{2}\right\} \cdot \delta\left(\nu + \frac{\boldsymbol{q}^2}{2\boldsymbol{M}}\right) \qquad (2.33)$$

kde $\alpha = e^2/4\pi$, $\nu = E - E'$.

Alebo keď nás zaujíma iba uhol rozptylu elektrónu :

$$\frac{\boldsymbol{d\sigma}}{\boldsymbol{d\Omega}} = \frac{\alpha^2}{4\boldsymbol{E}^2\sin^4\frac{\boldsymbol{\theta}}{2}}\frac{\boldsymbol{E}'}{\boldsymbol{E}} \cdot \left\{\cos^2\frac{\boldsymbol{\theta}}{2} - \frac{\boldsymbol{q}^2}{2\boldsymbol{M}^2}\sin^2\frac{\boldsymbol{\theta}}{2}\right\} \qquad (2.34)$$

Formuly pre bodový rozptyl (2.33) a (2.34) sú veľmi dôležité, pretože odklon od zákona bodového rozptylu poukazuje na prítomnosť nebodovej štruktúry, teda poskytuje informáciu o štruktúre.

Poznámka. Ak by sme namiesto miónu zobrali bodovú časticu so spinom 0, potom pre účinný prierez rozptylu e^- na uhol θ je:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\frac{E'}{E}\cdot\cos^2\frac{\theta}{2} \tag{2.35}$$

z porovnania vzťahov (2.34 a (2.35) je zrejme, že člen obsahujúci $\sin^2\theta/2$ v (2.34) vzniká v dôsledku rozptylu na magnetickom momente miónu.

Doplnok A. Gordonov rozvoj.

Elektromagnetický prúd spôsobený prechodom elektrónu zo stavu $|i\rangle$ do stavu $|f\rangle$

Je možné rozložiť na 2 komponenty:

$$-e\bar{u}_f\gamma^\mu u_i=-e\bar{u}_f\left(\frac{(p_f+p_i)^\mu}{2m}-i\frac{\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\right)u_i \tag{A1}$$

kde $\sigma^{\mu\nu}=\frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu)$.

Vychádzajme z

$$\begin{aligned}&\bar{u}_f(i\sigma^{\mu\nu}q_\nu)u_i=\tfrac{1}{2}\bar{u}_f(\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu)(p_i-p_f)_\nu u_i=\\&\underbrace{+\tfrac{1}{2}\bar{u}_f\gamma^\mu\gamma^\nu(p_f)_\nu u_i}_{V_1}\quad\underbrace{-\tfrac{1}{2}\bar{u}_f\gamma^\nu\gamma^\mu(p_f)_\nu u_i}_{V_2}\\&\underbrace{-\tfrac{1}{2}\bar{u}_f\gamma^\mu\gamma^\nu(p_i)_\nu u_i}_{V_3}\quad\underbrace{+\tfrac{1}{2}\bar{u}_f\gamma^\nu\gamma^\mu(p_i)_\nu u_i}_{V_4}\end{aligned} \tag{A2}$$

Výrazy V_2 a V_3 môžeme ľahko upraviť použitím Diracovej rovnice:

$$V_2=-\tfrac{1}{2}\bar{u}_f\hat{p}_f\gamma^\mu u_i=-\tfrac{1}{2}m\bar{u}_f\gamma^\mu u_i\qquad(\bar{u}_f\hat{p}_f=m\bar{u}_f) \tag{A.3}$$

$$V_3=-\tfrac{1}{2}\bar{u}_f\gamma^\mu\hat{p}_i u_i=-\tfrac{1}{2}m\bar{u}_f\gamma^\mu u_i\qquad(\hat{p}_i u_i=m u_i) \tag{A.4}$$

Pre výrazy V_1 a V_4 je treba použiť : $\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}V_1&=\tfrac{1}{2}\bar{u}_f(-\gamma^\nu\gamma^\mu+2g^{\mu\nu})(p_f)_\nu u_i=-\tfrac{1}{2}\bar{u}_f\gamma^\nu(p_f)_\nu\gamma^\mu u_i+\bar{u}_f p_f^\mu u_i=\\&=\ -\tfrac{1}{2}m\bar{u}_f\gamma^\mu u_i+\bar{u}_f p_f^\mu u_i\end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}V_4&=\tfrac{1}{2}\bar{u}_f(-\gamma^\mu\gamma^\nu+2g^{\mu\nu})(p_i)_\nu u_i=-\tfrac{1}{2}\bar{u}_f\gamma^\mu(p_i)_\nu\gamma^\nu u_i+\bar{u}_f p_i^\mu u_i=\\&=\ -\tfrac{1}{2}m\bar{u}_f\gamma^\mu u_i+\bar{u}_f p_i^\mu u_i\end{aligned} \tag{A.6}$$

Teda pre A.2 na základe (A3-6) dostávame:

$$\bar{u}_f i\sigma^{\mu\nu}(p_i-p_f)_\nu=V_1+V_2+V_3+V_4=-2m\bar{u}_f\gamma^\mu u_i+\bar{u}_f(p_i+p_f)^\mu u_i \tag{A.7}$$

Z čoho dostávame (A.1)

Doplnok B. Normovanie spinorov.

Pri normovaní spinorov vychádzame z prúdovej hustoty: $(\rho,\vec{j}) = \overline{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)$

a zvyčajne normujeme ψ

- na **1 časticu** v objeme ***V***
- alebo na ***2E častíc*** v objeme V.

Pritom sa obyčajne kladie V=1.*

$$\int_V \overline{\psi}\gamma^0\psi\, d^3x = \int_V \psi^+\psi\, d^3x = u^+uV \underbrace{=}_{V=1} \begin{cases} 1 \\ 2E \end{cases} \tag{B.1}$$

keď vychádzame z riešenia DR pre voľnú časticu s hybnosťou $\vec{p}$ (viď.7a,b)

dostaneme:

$$u^{(s)+}u^{(s)} = |N|^2\left(1+\left(\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\right)^2\right) = |N|^2\,\frac{2E}{E+m} = \begin{cases} 1 \\ 2E \end{cases} \tag{B.2}$$

Kde sme využili:

$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 = \vec{p}^{\,2}$ (všeobecne platí: $(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})(\vec{\sigma}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$).

Pre pre normovanie na ***2E*** **(N_2*)** resp. pre normovanie na ***1*** ***(N_1*)*** platí:

$$N = \sqrt{E+m} \qquad \text{resp.} \qquad N = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \tag{B.3}$$

Teda pre riešenie DR v normovaní na ***2E*** dostávame:

$$u^{(i)}(\vec{p}) = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} \chi^{(i)} \\ \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(i)} \end{pmatrix} \quad , \quad u^{(i+2)}(\vec{p}) = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} \dfrac{-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(i)} \\ \chi^{(i)} \end{pmatrix} \quad i = 1,2 \tag{B.4}$$

Pritom $v^{(1,2)}(\vec{p}) = u^{(4,3)}(-\vec{p})$

Platí tiež:

$$\overline{u}^{(s)}u^{(s)} = |N|^2\left(1-\left(\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\right)^2\right) = |N|^2\,\frac{2m}{E+m} = \begin{cases} m/E & N\_1^* \\ 2m & N\_2^* \end{cases} \tag{B.5}$$

Ešte jeden spôsob normovania ***(N_3*)***:

$$\overline{u}^{(s)}u^{(s)} = 1 \quad \Rightarrow \quad N = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \tag{B.6}$$

Čo platí pre antičasticu?

$$\bar{v}^{(s)}v^{(s)} = |N|^2\left(\left(\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\right)^2 - 1\right) = -|N|^2\frac{2m}{E+m} = \begin{cases} -m/E & N\_1* \\ -2m & N\_2* \\ -1 & N\_3* \end{cases} \qquad \text{(B.7)}$$

Normovanie spinorov je veľmi dôležité pre tzv. **vzťahy úplnosti** (viď. 15-16), ktoré sa používajú pri výpočte amplitúd procesov (Feynmannove diagramy):

$$\sum_{s=1,2} u^{(s)}(p)\,\bar{u}^{(s)}(p) = \begin{cases} \frac{1}{2E}(\hat{p}+m) \\ \hat{p}+m \\ \frac{1}{2m}(\hat{p}+m) \end{cases} \quad \text{a} \quad \sum_{s=1,2} v^{(s)}(p)\,\bar{v}^{(s)}(p) = \begin{cases} -\frac{1}{2E}(\hat{p}-m) & N\_1* \\ -(\hat{p}-m) & N\_2* \\ -\frac{1}{2m}(\hat{p}-m) & N\_3* \end{cases}$$

(B8)

Doplnok C. Algebra γ-matíc - základné vlastnosti γ-matíc.

Fundamentálny anti-komutátor:

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad g^{\mu\nu} \equiv \text{metrický tenzor} \tag{C.1}$$

γ-matice v štandardnej reprezentácii:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{C.2}$$

Kde

$$\vec{\sigma} = (\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) \quad , \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{C.3}$$

Z definície γ_5 resp. z explicitného vyvadrenia vyplýva:

$$\{\gamma_5,\gamma^\mu\} = 0, \qquad \gamma_5^2 = 1 \tag{C.4}$$

A tiež platí:

$$\gamma_5 \equiv \frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma, \qquad \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{párne kombinácie} \quad 0,1,2,3 \\ -1 & \text{nepárne kombinácie} \quad 0,1,2,3 \\ 0 & \text{2 a viac zhodých indexov} \end{cases} \tag{C.5}$$

Pri výpočte Fenmannovych diagramov je treba využiť nasledovné ***vlastnosti stôp súčinov γ-matíc***:

$$\begin{aligned} Sp(\gamma^\mu\gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu} \\ Sp(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) &= 4\left[g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\right] \\ Sp(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) &= 4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \\ Sp(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu) &= 0 \end{aligned} \tag{C.6}$$

a platia vzťahy ($\hat{a} \equiv a_\mu\gamma^\mu$) :

$$\begin{aligned} \gamma_\mu\gamma^\mu &= 4 \\ \gamma_\mu\hat{a}\gamma^\mu &= -2\hat{a} \\ \gamma_\mu\hat{a}\hat{b}\gamma^\mu &= 4a\cdot b \\ \gamma_\mu\hat{a}\hat{b}\hat{c}\gamma^\mu &= -2\hat{c}\hat{b}\hat{a} \\ \hat{a}\hat{b} &= 2(ab) - \hat{b}\hat{a} \end{aligned} \tag{C.7}$$

Doplnok D. Coulombov rozptyl elektrónov

Pre rozptyl elektrónov na statickom atómovom jadre s nábojom ***Ze*** sme dostali nasledovnú amplitúdu:

$$M = ie\bar{u}_f \gamma^0 u_i \cdot \frac{1}{q^2} \cdot (-iZe) \qquad \text{D.1}$$

pritom energia elekrónu sa pri rozptyle nemení: $E_f = E_i$. Nepolarizovaný účinný prierez Coulombovského rozptylu je úmerný $\overline{|M|^2}$, kde kvadrat amplitúdy je spriemerovaný cez počiatočné a presumovaný cez finálne spinové stavy elektrónu.

$$\overline{|M|^2} = \frac{Z^2e^4}{q^4} \cdot \frac{1}{2}\sum_{s,s'} \bar{u}_f^{(s')}\gamma^0 u_i^{(s)} \left(\bar{u}_f^{(s')}\gamma^0 u_i^{(s)}\right)^+ = \frac{Z^2e^4}{q^4} \cdot \frac{1}{2}\sum_{s,s'} \bar{u}_f^{(s')}\gamma^0 u_i^{(s)}\bar{u}_i^{(s)}\gamma^0 u_f^{(s')} \qquad \text{D.2}$$

kde sme využili platnosť:

$$\left(\bar{u}_f \gamma^\nu u_i\right)^+ = \left(u_f^+ \gamma^0 \gamma^\nu u_i\right)^+ = u_i^+ \gamma^{\nu +}\gamma^0 u_f = u_i^+ \gamma^0 \gamma^\nu u_f = \bar{u}_i \gamma^\nu u_f \qquad \text{D.3}$$

lebo $\gamma^{\nu +}\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\nu$ (viď. vlastnosti γ-matíc) .

Na druhej strane platí (2.15):

$$\sum_{s=1,2} u_i^{(s)}\ \bar{u}_i^{(s)} = \hat{p}_i + m \qquad \text{D.4}$$

Pre sumu v amplitúde v D.2 máme:

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{s'} \bar{u}_f^{(s')}\gamma^0(\hat{p}_i + m)\gamma^0 u_f^{(s')} = \sum_{s'} \left(\bar{u}_f^{(s')}\right)_\alpha \left(\gamma^0(\hat{p}_i + m)\gamma^0\right)_{\alpha\beta} \left(u_f^{(s')}\right)_\beta = \\
&= \left(\gamma^0(\hat{p}_i + m)\gamma^0\right)_{\alpha\beta} \sum_{s'} \left(u_f^{(s')}\right)_\beta \left(\bar{u}_f^{(s')}\right)_\alpha = \left(\gamma^0(\hat{p}_i + m)\gamma^0\right)_{\alpha\beta} \left(\hat{p}_f + m\right)_{\beta\alpha} = \\
&= Tr\left\{\gamma^0(\hat{p}_i + m)\gamma^0(\hat{p}_f + m)\right\} = Tr\left\{\gamma^0\hat{p}_i\gamma^0\hat{p}_f + m\hat{p}_f + m\gamma^0\hat{p}_i\gamma^0 + m^2\right\} = \\
&= Tr\left\{\gamma^0\hat{p}_i\gamma^0\hat{p}_f\right\} + 4m^2 = 4\left(E_iE_f - p_i\cdot p_f + E_fE_i + m^2\right) = \\
&= 4\left(2E^2 - p_i\cdot p_f + m^2\right) \quad = \quad 8E^2\left(1 - \beta^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)
\end{aligned} \qquad \text{D.5}$$

Keďže $q^2 \approx -2p_i\cdot p_f \approx -4\vec{p}^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}$ pre kvadrát maticového elementu máme:

$$\overline{|M|^2} = \frac{Z^2e^4}{4E^2\sin^4\frac{\vartheta}{2}} \cdot \left(1 - \beta^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right) \qquad \text{D.6}$$