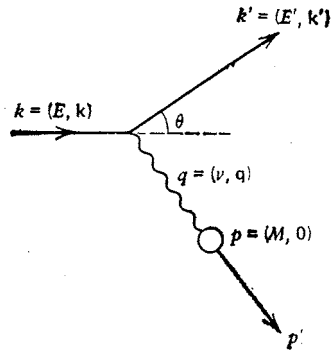


3. Štruktúra hadrónov

Rozptyl $e\mu \rightarrow e\mu$ dáva:



Pre kvadrát modulu amplitúdy M_{fi} platí:

$$\overline{|M_{fi}|^2} = \frac{8e}{q^4} 2M^2 EE' \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \quad (1)$$

Pre jeho účinný prierez dostávame:

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{(2\alpha E')^2}{q^4} \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \cdot \delta\left(\nu + \frac{q^2}{2M}\right) \quad (2)$$

kde $\alpha = e^2/4\pi$, $\nu = E - E'$.

Alebo keď nás zaujíma iba uhol rozptylu elektrónu :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{E'}{E} \cdot \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \quad (3)$$

Vo všeobecnosti pre rozptyl na nebodovom objekte je možné písať:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{point}} \cdot |F(\vec{q})|^2 \quad (4)$$

Kde $F(\vec{q})$ je **formfaktor odraňajúci nebodovosť rozptylového centra**. Platí preň:

- Pri $|\vec{q}| \rightarrow 0 \Rightarrow F(0) = 1$ (vlnová dĺžka skanujúceho virtuálneho fotónu je oveľa väčšia ako rozmer rozptylového centra)
- $F(\vec{q}) = \int d^3\vec{x} \rho(\vec{x}) \exp(i\vec{q} \cdot \vec{x})$ je Fourierovým obrazom rozdelenia náboja.

Poznámka. Uvažujme prípad nebodového rozptylového centra charakterizovaného rozložením náboja $\rho(\vec{x})$. Z Maxwellovej rovnice pre statický potenciál ($A_\mu(x) = (\phi(\vec{x}), 0)$):

$$\nabla^2 \phi(\vec{x}) = -Ze\rho(\vec{x})$$

vyplýva :

$$\int d^3\vec{x} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \nabla^2 \phi(\vec{x}) = -Ze \int d^3\vec{x} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \rho(\vec{x})$$

a odtiaľ máme:

$$\int d^3\vec{x} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \phi(\vec{x}) = \frac{Ze}{|\vec{q}|^2} \int d^3\vec{x} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \rho(\vec{x}) = \frac{Ze}{|\vec{q}|^2} F(\vec{q}).$$

Prakticky to znamená, že pri prechode od rozptylu bodového piónu na bodovom atómovom jadre ($T_f = ieN_i N_f \cdot 2\pi\delta(E_f - E_i) \cdot (E_i + E_f) \cdot Ze/|\vec{q}|^2$) k rozptylu bodového piónu na nebodovom atómovom jadre je treba urobiť zámenu:

$$\frac{Ze^2}{|\vec{q}|^2} \rightarrow \frac{Ze^2}{|\vec{q}|^2} F(\vec{q}), \text{ ktorá zodpovedá zámene: } Ze\delta(\vec{x}) \rightarrow Ze\rho(\vec{x}), \text{ teda}$$

nebodobosť nábojového rozloženia $\rho(\vec{x})$ sa prejaví objavením formfaktora $F(\vec{q})$ v amplitúde πA rozptylu.

Predpokladajme **sférickú symetriu nábojovej hustoty** $\rho = \rho(r)$, ($r = |\vec{x}|$) a rozviňme formfaktor do Taylorovho radu, dostaneme:

$$F(\vec{q}) = \int d^3\vec{x} \rho(\vec{x}) \left(1 + i\vec{q} \cdot \vec{x} - \frac{(\vec{q} \cdot \vec{x})^2}{6} + \dots \right) = 1 - \frac{|\vec{q}|^2}{6} \langle r^2 \rangle + \dots \quad (5)$$

- $\langle r^2 \rangle = \int d^3\vec{x} \rho(\vec{x}) \vec{x}^2$ je kvadrát strednej rozľahlosti rozptylového centra.

Ak predpokladáme, že $\rho(r) \sim \exp(-\lambda r)$, potom

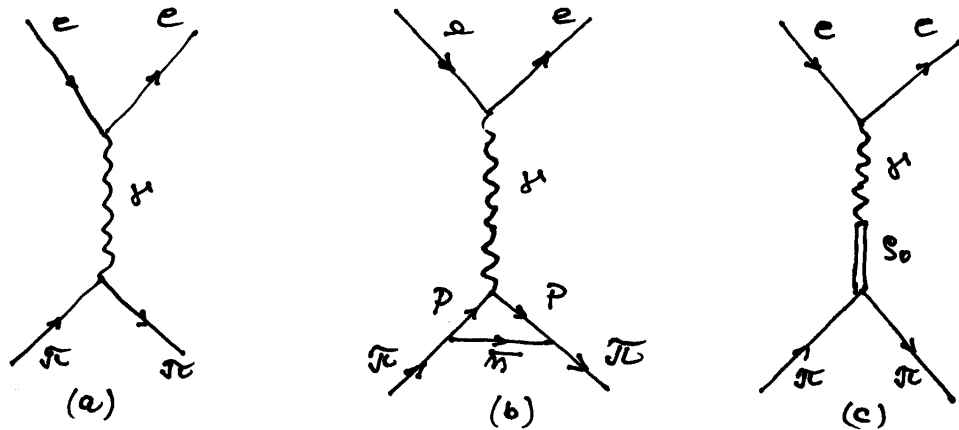
$$F(\vec{q}) \sim \frac{1}{\left(1 + \frac{|\vec{q}|^2}{\lambda^2} \right)} \quad (6)$$

Teda rozptylové centrum je charakterizované priestorovou rozľahlosťou $1/\lambda$.

$e\pi$ -rozptyl. Formfaktor piónu

Odlišnosť $e\pi$ -rozptylu oproti $e\mu$ -rozptylu:

Pión nie je bodová častica – je to viazaný systém kvarku a antikvarku: $\pi \equiv u\bar{d}$ (vid' obr.2). Preto okrem základného diagramu, ktorý predpokladá bodovosť piónu, musíme uvažovať aj iné diagramy (vid' obr.1).

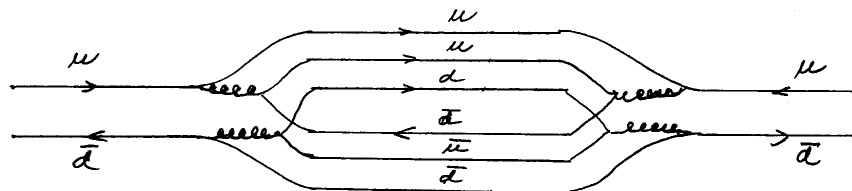


Obr. 1: $e\pi$ -rozptyl: a) bodový pión, b-c) vklady silných interakcií

Prejav štruktúry piónu. Vlnová dĺžka virtuálneho fotónu (skanujúci fotón) je daná prenesenou hybnosťou:

$$\lambda = \frac{\hbar}{|\vec{q}|}$$

kde $\vec{q}$ je prenesená hybnosť v procese $e\pi$ -rozptylu. Pri takomto rozptyle sa **štruktúra piónu prejaví** ak $\lambda \leq d$ (rozmer piónu).



Obr. 2: Pión π^+ ako interagujúci $u\bar{d}$ systém: možný prechod: $\pi^+ \equiv u\bar{d} \rightarrow p\bar{n} \rightarrow u\bar{d}$.

Ako uvažovať korekcie spôsobené silnou interakciou? Väzbová konštanta silných interakcií je prípade piónového vertexu veľká ($\alpha_s \geq 1$) (obr. 1b,1c) – poruchová teória nemôže byť aplikovaná - pión je neperturbatívny objekt.

Fenomenologický prístup.

Bodový bezštruktúrny pión môžeme v procese rozptylu charakterizovať prechodovým prúdom:

$$j_{\mu}^{(\pi)}(x) = eNN'(p + p')_{\mu} e^{iqx} \quad q = p - p' \quad (7)$$

Tok spojený s reálnym piónom je možné vyjadriť nasledovne:

$$J_{\mu}^{(\pi)}(x) = \langle \pi ; p' | J_{\mu}^{em}(x) | \pi ; p \rangle \xrightarrow{|\vec{q}| \rightarrow 0} j_{\mu}^{(\pi)}(x) \quad (8)$$

V dôsledku silnej interakcie maticový element pre bodový pión je treba modifikovať, avšak 4-vektorový charakter piónového prúdu bude zachovaný. Pre fenomenologický prístup máme k dispozícii 2 nezávislé 4-vektory:

$$q (= p - p') \quad \text{a} \quad p + p' \quad (9)$$

Vo všeobecnosti vo výraze pre prúd sa môžu vyskytovať aj skalárne (vzhľadom na Lorentzove transformácie) funkcie. Tieto funkcie môžu byť konštruované na základe nasledovných Lorentzových skalárov:

$$\begin{aligned} p^2 &= M^2 \\ p'^2 &= M^2 \\ p \cdot p' &= M^2 - \frac{q^2}{2} \quad (q^2 = (p' - p)^2 = 2M^2 - 2p \cdot p') \\ p \cdot q &= -\frac{q^2}{2} \quad (p(p' - p) = pp' - M^2 = -\frac{q^2}{2}) \\ p' \cdot q &= \frac{q^2}{2} \quad (p'(p' - p) = M^2 = p'p = \frac{q^2}{2}) \end{aligned} \quad (10)$$

Teda vidíme, že existuje **jediný Lorentzov skalár**, ktorý môžeme použiť na vytvorenie skalárnych funkcií: **q^2 - štvorec prenesenej hybnosti.**

Všeobecne možno pre **piónový tok** písať:

$$\langle \pi; p' | J_\mu^{em}(x) | \pi; p \rangle = eNN' [F(q^2) \cdot (p' + p)_\mu + G(q^2) \cdot q_\mu] e^{iqx} \quad (11)$$

Pričom platí :

$$F(q^2 \rightarrow 0) = 1 \quad \text{a} \quad G(q^2 \rightarrow 0) = 0 \quad (12)$$

Kalibračná invariantnosť a formfaktor piónu

Stav elektro-magnetického poľa je daný vektorom **elektrickej intenzity a magnetickej indukcie** $\vec{E}$ resp. $\vec{B}$. Avšak existuje celá trieda potenciálov, ktorá popisuje ten istý stav poľa $(\vec{E}, \vec{B})$:

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \chi \quad (13)$$

Výberom potenciálu je možné Maxwellovu rovnicu (dáva nám aký potenciál A^μ je generovaný prúdovou hustotou j^μ) :

$$\partial \cdot \partial A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = j^\mu \quad (14)$$

zjednodušiť – žiada sa splnenie **Lorentzovej podmienky**: $\partial_\mu A^\mu = 0$, ktorá vedie k:

$$\partial \cdot \partial A^\mu = j^\mu \quad (15)$$

Avšak:

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu \partial \cdot \partial A^\mu = \partial \cdot \partial \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (16)$$

Teda **kalibračná invariantnosť vedie k rovnici kontinuity**. Rovnicu kontinuity musí spĺňať aj piónový prúd (lebo platí pre ľubovoľný prúd):

$$\begin{aligned} -i\partial_\mu J_\mu^\pi(x) = q_\mu J_\mu^\pi(x) = 0 &\Rightarrow q^\mu \langle \pi, p' | J_\mu^{em}(q) | \pi, p \rangle = 0 \\ F(q^2) q^\mu (p' + p)_\mu + G(q^2) q^2 &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Platí však:

$$q \cdot (p' + p) = (p' - p)(p' + p) = p'^2 - p^2 = M^2 - M^2 = 0 \quad (18)$$

Pretože pre virtuálny fotón vo všeobecnosti platí $q^2 \neq 0$, musí platiť:

$$G(q^2) = 0 \quad (19)$$

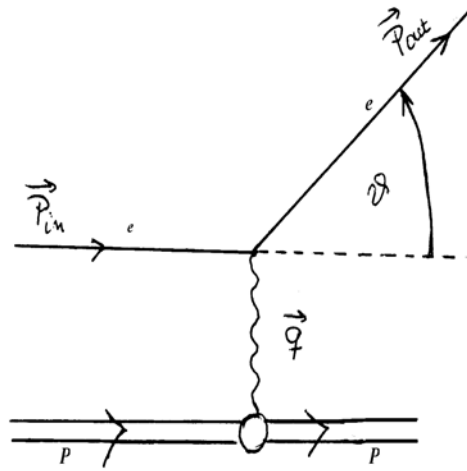
Záver: Virtuálne efekty silných interakcií v $\pi\pi\gamma$ -vertexe je možné popísať **jedinou skalárnou funkciou** s argumentom q^2 . Pritom platí:

$$\begin{array}{ccc} e(p' + p)_\mu & \rightarrow & eF(q^2)(p' + p)_\mu \\ \text{bodový pión} & & \text{reálny pión} \end{array}$$

$F(q^2)$ je **elektromagnetický formfaktor piónu**, ktorý spĺňa podmienku: $F(0)=1$.

Elektrón-protónový rozptyl. Protónové formfaktory

A. Amplitúda pružného ep-rozptylu



$$T_{fi} = i \int d^4x j_\mu \left(-\frac{1}{q^2} \right) J^\mu \quad (20)$$

kde $q = k' - k$, j^μ a J^μ sú elektrónový a protónový prúd spojený s prechodom týchto častíc s počiatočného do koncového stavu:

$$j^\mu = -e \bar{u}(k') \gamma^\mu u(k) \exp(i(k - k')x) \quad (21)$$

$$J^\mu = -e \bar{u}(p') \Gamma^\mu u(p) \exp(i(p - p')x) \quad (22)$$

Problémom je protónový prúd $J^\mu = \langle p, s | J_{em}^\mu(x) | p', s' \rangle$ – jeho štruktúru nepoznáme.

Aká je vertexovú funkciu Γ v protónovom prúde? Vo všeobecnosti môžeme písať:

$$\Gamma^\mu = F_1(q^2) \gamma^\mu + F_2(q^2) \frac{\kappa}{2m} \sigma^{\mu\nu} q_\nu \quad (23)$$

kde F_1 a F_2 sú nezávislé formfaktory κ je anomálny magnetický moment protónu.

Prečo má Γ^μ štruktúru (23)?

Pre zostrojenie protónového prúdu máme len 3 nezávislé vektory:

$$\bar{u} \gamma^\mu u, \quad \bar{u} \sigma^{\mu\nu} q_\nu u, \quad \bar{u} q^\mu u \quad (24)$$

Vzhľadom na to, že tento prúd

$$J^\mu = A(q^2) \bar{u} \gamma^\mu u + B(q^2) \bar{u} \sigma^{\mu\nu} q_\nu u + C(q^2) \bar{u} q^\mu u \quad (25)$$

musí spĺňať rovnicu kontinuity (kalibračná invariantnosť): $q_\mu J^\mu = 0$, to vedie k tomu, že analogicky ako v prípade piónu platí:

$$C(q^2) = 0 \quad (26)$$

Dôvod je v tom, že v dôsledku DR a antisymetričnosti $\sigma_{\mu\nu}$ platí:

$$\bar{u}\hat{q}u = \bar{u}(\hat{p}' - \hat{p})u = \bar{u}(m - m)u = 0 \quad \text{a} \quad \sigma_{\mu\nu}q^\mu q^\nu = 0 \quad (27)$$

- Ukázali sme si, že nebodovosť náboja vedie k formfaktoru (4), ktorý znamená, že faktor pri γ^μ sa zmení: $1 \rightarrow F(|\vec{q}|)$.
- Okrem toho Pri eZe rozptyle v 2. ráde poruchovej teórie obsahuje $ee\gamma$ -vertex slučku, teda javí priestorovú štruktúru. Tejto skutočnosti zodpovedala záměna $\gamma^\mu \rightarrow \gamma^\mu + (\kappa/2m)\sigma^{\mu\nu}q_\nu$.
- Pri dlhovlnom fotóne ($q^2 \rightarrow 0$) vetexová funkcia Γ^μ musí mať štruktúru odpovedajúcu bodovej častici: $F_1(0) = 1$ a $F_2(0) = 0$.

Ak vo výraze pre amplitúdu rozptylu urobíme záměnu $\gamma^\mu \rightarrow \Gamma^\mu$ a opakujeme rovnaký postup ako pri $e\mu$ -rozptyle, tak namiesto vzťahu (1) dostaneme

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{LS} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{E'}{E} \left\{ \left(F_1^2 - \frac{\kappa^2 q^2}{4M^2} F_2^2 \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} (F_1 - \kappa F_2)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \quad (28)$$

Namiesto F_1 a F_2 sa často používajú ich kombinácie

$$G_E = F_1 + \frac{\kappa q^2}{4M^2} F_2 \quad \text{a} \quad G_M = F_1 + \kappa F_2 \quad (29)$$

zvané **magnetický (G_M) a elektrický (G_E) formfaktor**. Výhoda takehoto vyjadrenia je v tom, že v takomprípade niet interferenčného člena $G_E G_M$:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{LS} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{E'}{E} \left\{ \frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} \cos^2 \frac{\theta}{2} - 2\tau \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \quad (30)$$

kde $\tau = -q^2/(4M^2)$.

Zmeranie účinného prierezu $ep \rightarrow ep$ rozptylu poskytuje informáciu o G_E a G_M – experiment pritom dáva:

$$G_E(q^2) = \left(1 - \frac{q^2}{0.71}\right)^{-2} \quad \text{a} \quad G_M = \mu G_E \quad (31)$$

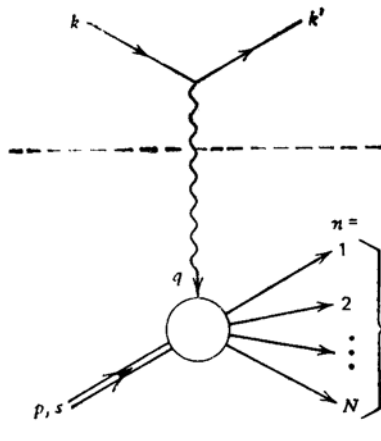
Z priebehu $G_E(q^2)$ pre rozmer protónu dostávame:

$$\langle r^2 \rangle = 6 \frac{dG_E(q^2)}{dq^2} \Big|_{q^2=0} = (0.81 \text{ fm})^2 \quad (32)$$

Analogický polomer ($\sim 0.8 \text{ fm}$) bol nájdený pre rozdelenie magnetického momentu.

Nepružný ep-rozptyl

Pri veľkých $Q^2 (= -q^2)$ je veľmi pravdepodobná fragmentácia protónu $\rightarrow$ môže sa vzbudiť v Δ -rezonanciu: $ep \rightarrow e \Delta^+ \rightarrow e p \pi^0$.



Takéto eventy je možné charakterizovať inv. hmotnosťou $W^2 = M_\Delta^2$.

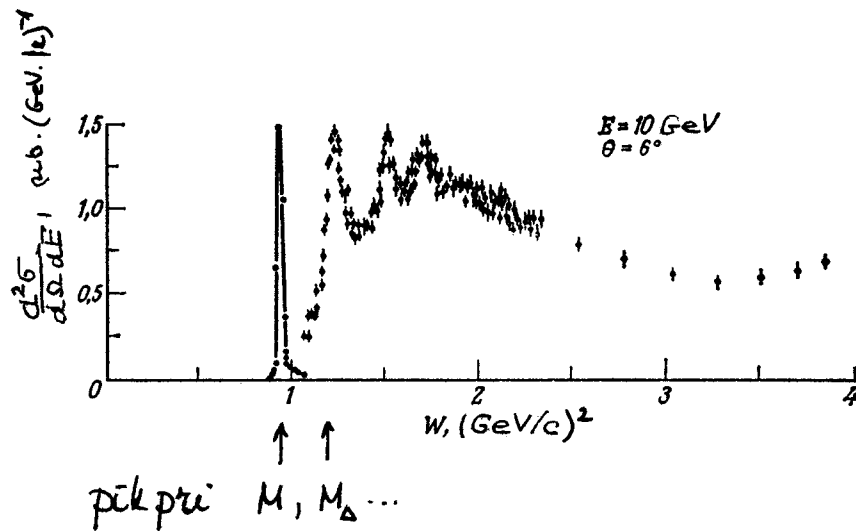
Invariantná hmotnosť sa určuje metódou „missing mass“:

$$W^2 = (p_I + \dots + p_N)^2 = (k + p - k')^2 \quad (33)$$

Účinný prierez. V analógii s $e\mu$ -rozptylom pre diferenciálny účinný prierez môžeme písať:

$$\frac{d^2\sigma}{dE'd\Omega} = \frac{\alpha^2}{Q^4} \frac{E'}{E} |M|^2 = \frac{\alpha^2}{Q^4} \frac{E'}{E} L_{\mu\nu}^{(e)} W^{\mu\nu} \quad (34)$$

Kedže nepoznáme hadrónový tok, pre nájdenie $W^{\mu\nu}$ použijeme fenomenológiu – zákony zachovania a nezávislé hybnosti p a q .



Najobecnejšia forma $W^{\mu\nu}$ (ak výmennou časticou je fotón a niet narušenia C,P) je:

$$W^{\mu\nu} = W_1 g_{\mu\nu} + W_2 \frac{p^\mu p^\nu}{M^2} + W_4 \frac{q^\mu q^\nu}{M^2} + W_5 \frac{p^\mu q^\nu + q^\mu p^\nu}{M^2} \quad (35)$$

Keďže $L_{\mu\nu}$ je symetrický vklad z $W^{\mu\nu}$ dá len symetrická časť. Zákon zachovania prúdu ($\partial_\mu J^\mu = 0$) vedie k 2 podmienkam pre $W^{\mu\nu}$:

$$q_\mu W^{\mu\nu} = 0 \quad \text{a} \quad q_\nu W^{\mu\nu} = 0 \quad (36)$$

Čo znamená, že len **2** zo **4** W_i parametrov **sú nezávislé** a $W^{\mu\nu}$ možno parametrizovať:

$$W^{\mu\nu} = W_1 \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{M^2} \right) + \frac{W_2}{M^2} \left(p^\mu - \frac{pq}{q^2} q^\mu \right) \left(p^\nu - \frac{pq}{q^2} q^\nu \right) \quad (37)$$

Kde W_1 a W_2 sú funkcie skalárnych premenných vytvorených zo 4-vektorov v hadrónovom vertexe.

Existujú 2 nezávislé premenné: q^2 a $\nu = \frac{pq}{M}$. Prostredníctvom týchto premenných si môžeme

vyjadriť invariantnú hmotnosť systému finálnych hadrónov:

$$W^2 = (p + q)^2 = M^2 + 2M\nu + q^2 \quad (38)$$

Poznámka. Ďalšie kinematické premenné, ktoré sa používajú sú:

$$x = -\frac{q^2}{2pq} \quad \text{a} \quad y = \frac{pq}{pk} \quad (39)$$

Účinný prierez pre inelastický *ep-rozptyl* dostaneme z *eμ-rozptylu* zámenou $L_{\mu\nu}^{(m)} \rightarrow W_{\mu\nu}$:

$$\frac{d\sigma}{dE'd\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left\{ W_2(\nu, q^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1(\nu, q^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \quad (40)$$

Zhrnutie *eX-rozptylu*

Diferenciálny účinný prierez *eX-rozptylu* ako funkcia energie (E') a uhla (θ) rozptyleného elektrónu:

$$\frac{d^2\sigma}{dE'd\Omega} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{q^4} \{R\}_{eX} \quad (41)$$

kde

$$\begin{aligned} \{R\}_{e\mu \rightarrow e\mu} &= \delta\left(\nu + \frac{q^2}{2m}\right) \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{q^2}{2m^2} \delta\left(\nu + \frac{q^2}{2m}\right) \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ \{R\}_{eP \rightarrow eP} &= \delta\left(\nu + \frac{q^2}{2m}\right) \frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\tau G_M \delta\left(\nu + \frac{q^2}{2m}\right) \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ \{R\}_{eP \rightarrow eX} &= W_2(\nu, q^2) \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1(\nu, q^2) \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (42)$$