

Krok k elektroslabému zjednoteniu

Predpokladajme, že fyzikálny systém obsahuje leptóny a kvarky 3 pokolení:

$$\Psi_e = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \quad \Psi_\mu = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} \quad \Psi_\tau = \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix} \quad (4.3.1)$$

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \Psi_2 = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad \Psi_3 = \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$$

Experiment: slabé nabité toky majú (V-A)-štruktúru, t.j. **v prechodoch vyvolaných slabými nabitými prúdmi sa zúčastňujú len ľavé komponenty leptónov a kvarkov.**

Poznámka. Pri rozpade miónu ($\mu^- \rightarrow e^- \nu_e \bar{\nu}_\mu$) elektróny vyletujú predovšetkým proti smeru orientácie spinu miónu a dominuje u nich ľavá polarizácia (spin proti smeru pohybu). Ak by slabá interakcia mala V-charakter (ako elektromagnetická interakcia), potom by platila pravo-ľavá symetria (50% elektrónov s ľavou polarizáciou a 50% s pravou polarizáciou), atď.

Je preto prirodzené rozdeliť fundamentálne fermióny na „ľavé“ a „pravé“ častice, pritom ľavé komponenty častíc budú vytvárať izodublety, zatiaľčo pravé komponenty častíc – izosinglety. Teda:

$$\Psi_{fL} = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\Psi_f, \quad f = e, \mu, \tau, 1, 2, 3 \quad \gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3.2)$$

vytvárajú SU(2)-dublety, zatiaľ čo

$$\Psi_{fR} = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\Psi_f, \quad \Psi_f = \nu_e, e^-, \nu_\mu, \mu^-, \dots, t, b, \quad (4.3.3)$$

predstavujú SU(2)-singlety.

Lagranžian voľného systému vyššie zmienených častíc je možné písať:

$$L = \sum_f \bar{\Psi}_{fL} (1 \cdot i\gamma^\mu \partial_\mu - M_f) \Psi_{fL} + \sum_f \bar{\Psi}_{fR} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f) \Psi_{fR} \quad (4.3.4)$$

Kde $\Psi_L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\nu_l \\ \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)l \end{pmatrix}, \quad 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_f = \begin{pmatrix} m_f^1 & 0 \\ 0 & m_f^2 \end{pmatrix}$

Poznámka. Štruktúra izodubletu je nasledovná: $\Psi = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{\text{izospinor}} \otimes \underbrace{\Psi}_{\text{bispinor}}$. SU(2) pôsobí len na

izospinor, pritom $|\alpha|^2$ (resp. $|\beta|^2$) je pravdepodobnosť výskytu častice v stave ν (resp. l).

Slabý izospin a hypernáboj.

Izodublet popisuje časticu, ktorá sa nachádza v 2 izotopických, analogicky ako v prípade spinu, tieto izotopické stavy sú vlastnými stavmi operátorov $\vec{t}^2$ a t_3 . Vlastné hodnoty týchto operátorov sú: $T(T-1)$ a $T_3 = -T, -T+1, \dots, T-1, T$. Kvantové číslo T definuje počet vlastných stavov operátorov $\vec{t}^2$ a t_3 , ktorý je $2T+1$.

Izodublet je charakterizovaný $T=1/2$ a projekciami $T_3=-1/2, 1/2$, ktoré zodpovedajú 2 vlastným stavom (izodublet má 2 komponenty).

Príklad: ľavé komponenty elektrónového a neutrínového poľa (e resp. ν so spinom orientovaným proti smeru pohybu) vytvárajú **slabý izodublet**. Právě komponenty sú **slabými izosingletmi** a odpovedá im $T=0$.

Je výhodné si zaviesť **slabý hypernáboj**: $Y = 2(Q - T_3)$, Q je elektrický náboj [e], ktorý má tu istú hodnotu pre obe časticové komponenty izodubletu (Tab.1).

Tab.1: Kvantové čísla leptónov

Kvantové číslo	ν_{eL}	e_L	ν_{eR}	e_R	$\nu_{\mu L}$	μ_L	$\nu_{\mu R}$	$\mu_R \dots$
Q	0	-1	0	-1	0	-1	0	-1
T_3	1/2	-1/2	0	0	1/2	-1/2	0	0
Y	-1	-1	0	-2	-1	-1	0	-2

Poznámka. Na častice vytvárajúce izodublet (napr. ν_{eL} a e_L) (ten istý hypernáboj) – je možné sa dívať ako na jednu časticu v 2 izotopických stavoch - pre izosinglety ν_{eR} a e_R to neplatí.

Uvažujme grupu kalibračných transformácií $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$:

$$SU(2): \varphi \rightarrow \varphi' = \exp(i g \epsilon_a t^a) \varphi \quad U(1): \varphi \rightarrow \varphi' = \exp\left(i g' \frac{Y}{2} \alpha\right) \varphi \quad (4.3.5)$$

Konštanty g a g' vyjadujú silu väzby fundamentálnych fermiónov (napr. ν_{eL} a e_L) na kompenzujúce kalibračné polia (viď. ďalej).

Ak požadujeme, aby Lagranžián (4.3.4) bol **lokálne invariantný** voči grupe kalibračných transformácií $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ je treba do toho lagranžiánu **zaviesť interakciu**

fundamentálnych častíc so 4 kalibračnými poliami, čo je možné urobiť zámennou:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + i g t_a A_\mu^a + i \frac{Y}{2} g' B_\mu \quad (4.3.6)$$

V súlade s Tab. 1 interakcia fundamentálnych častíc bude rôzna – daná príslušnou kovariantnou deriváciou :

$$\begin{aligned}
D_\mu \Psi_L &= \left(\partial_\mu + ig t_a A_\mu^a - i \frac{1}{2} g' B_\mu \right) \Psi_L & \Psi_L &= \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \\
D_\mu e_R &= (\partial_\mu - ig' B_\mu) e_R \\
D_\mu \nu_{eR} &= \partial_\mu \nu_{eR} \\
&\dots
\end{aligned} \tag{4.3.7}$$

V lagranžiáne (4.3.4) zoberme do úvahy len prvé pokolenie leptónov ($\mathbf{e}, \mathbf{\nu}_L$) a zaved'me kovariantnu deriváciu ($\partial_\mu \rightarrow D_\mu$), potom pre lagranžián s interakciou dostávame:

$$\begin{aligned}
L &= \bar{\Psi}_{eL} \left(i \gamma^\mu \partial_\mu - g \gamma^\mu t_a A_\mu^a + \frac{g'}{2} \gamma^\mu B_\mu \right) \Psi_{eL} + \bar{e}_R (i \gamma^\mu \partial_\mu + g' \gamma^\mu B_\mu) e_R + \bar{\nu}_{eR} (i \gamma^\mu \partial_\mu) \nu_{eR} \\
&= L_0 - g \bar{\Psi}_{eL} \gamma^\mu t_a \Psi_{eL} \cdot A_\mu^a + \frac{g'}{2} \bar{\Psi}_{eL} \gamma^\mu \Psi_{eL} \cdot B_\mu + g' \bar{e}_R \gamma^\mu e_R \cdot B_\mu + h.c.
\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

Poznámka: ľavé leptónové komponenty interagujú tak s poliami A_μ^a , $a = 1, 2, 3$, tak aj s poľom B_μ . Právě komponenty elektrónového poľa však interagujú iba s poľom B_μ , právě komponenty neutrínového poľa sú však inertné.

Zaved'me:

$$\tau_+ = \frac{1}{2}(\tau_1 + i\tau_2) = t_1 + it_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_- = \frac{1}{2}(\tau_1 - i\tau_2) = t_1 - it_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.3.9}$$

$$W_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 - iA_\mu^2) \quad W_\mu^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 + iA_\mu^2) \quad W_\mu^0 = A_\mu^3$$

Potom platí:

$$t_a A_\mu^a = \frac{\tau_+}{\sqrt{2}} W_\mu^+ + \frac{\tau_-}{\sqrt{2}} W_\mu^- + \frac{\tau_3}{2} W_\mu^0 \tag{4.3.10}$$

A lagranžián (4) môžeme prepísať:

$$\begin{aligned}
L &= L_0 - \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\Psi}_{eL} \gamma^\mu \tau_+ \Psi_{eL} \cdot W_\mu^+ - \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\Psi}_{eL} \gamma^\mu \tau_- \Psi_{eL} \cdot W_\mu^- \\
&\quad - \frac{g}{2} \bar{\Psi}_{eL} \gamma^\mu \tau_3 \Psi_{eL} \cdot W_\mu^0 + \frac{g'}{2} \bar{\Psi}_{eL} \gamma^\mu \Psi_{eL} \cdot B_\mu + g' \bar{e}_R \gamma^\mu e_R \cdot B_\mu
\end{aligned} \tag{4.3.11}$$

Keďže platí:

$$\bar{\Psi}_{eL} \gamma^\mu \tau_+ \Psi_{eL} = (\bar{\nu}_{eL}, \bar{e}_L) \gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} = \bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu e_L = \frac{1}{2} \bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e \quad (4.3.12)$$

a podobne tiež:

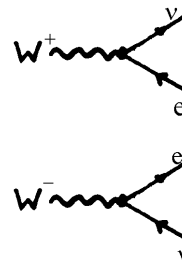
$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{eL} \gamma^\mu \tau_- \Psi_{eL} &= \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_{eL} = \frac{1}{2} \bar{e}_L \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \nu_e \\ \frac{1}{2} \bar{\Psi}_{eL} \gamma^\mu \tau_3 \Psi_{eL} &= \frac{1}{2} \bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu \nu_{eL} - \frac{1}{2} \bar{e}_L \gamma^\mu e_L \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

Po dosadení do (11):

$$\begin{aligned} L &= L_0 - \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu e_L \cdot W_\mu^+ + \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_{eL} \cdot W_\mu^-) \\ &- \frac{g}{2} (\bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu \nu_{eL} \cdot W_\mu^0 - \bar{e}_L \gamma^\mu e_L \cdot W_\mu^0) \\ &+ \frac{g'}{2} (\bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu \nu_{eL} \cdot B_\mu + \bar{e}_L \gamma^\mu e_L \cdot B_\mu) \\ &+ g' \bar{e}_R \gamma^\mu e_R \cdot B_\mu \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

Prvé 2 interakčné členy v (14) zodpovedajú **nabitým prúdom** a ich interpretácia je jasná: pri interakcii sprostredkovanej poľom W_μ^+ resp. W_μ^- „ľavý“ elektrón prechádza na „ľavé“ neutríno, teda pri interakcii v poli W_μ^+ resp. W_μ^- dochádza k zmene náboja, a teda uvedené polia sú nabité. Ostatné interakčné členy v (14) sú spôsobené **neutrálnymi prúdmi**, lebo pri nich nedochádza k zmena nábojového stavu leptónu. Neutrálne polia sú dve (W_μ^3, B_μ), avšak

$$\begin{aligned} J_+^\mu W_\mu^+ &= ig \bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu e_L \cdot W_\mu^+ \\ &= ig \bar{\nu}_e \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) e \cdot W_\mu^+ \\ J_-^\mu W_\mu^- &= ig \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_{eL} \cdot W_\mu^- \\ &= ig \bar{e} \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 + \gamma^5) \nu_e \cdot W_\mu^- \end{aligned}$$



ani jedno z nich nie je elektromagnetické pole (obe interagujú s poľom neutrín).

Riešenie situácie: polia (W_μ^3, B_μ) sú kombináciami 2 fyzikálnych polí: **elektromagnetického poľa** A_μ a **slabého neutrálneho poľa** Z_μ . Ak si vyjadríme polia W_μ^0, B_μ ako:

$$\begin{aligned} W_\mu^0 &= c_W \cdot Z_\mu + s_W \cdot A_\mu & \text{resp.} & & Z_\mu &= c_W \cdot W_\mu^0 - s_W \cdot B_\mu \\ B_\mu &= -s_W \cdot Z_\mu + c_W \cdot A_\mu & & & A_\mu &= s_W \cdot W_\mu^0 + c_W \cdot B_\mu \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

kde $s_W = \sin \theta_W$ $c_W = \cos \theta_W$, θ_W je uhol zmiešavania.

Neutrálnu časť interakčného lagranžiánu (14) si potom môžeme vyjadriť:

$$L_{NC} = -\frac{1}{2} \left[\bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu \nu_{eL} \cdot (g W_\mu^0 - g' B_\mu) - \bar{e}_L \gamma^\mu e_L \cdot (g W_\mu^0 + g' B_\mu) \right] + g' \bar{e}_R \gamma^\mu e_R \cdot B_\mu \quad (4.3.16)$$

Neutrínové pole môže interagovať iba so slabým neutrálnym poľom Z_μ - vychádzajúc zo (16) a zohľadniac (15), môžeme nájsť fyzikálne polia (Z_μ, A_μ) zafixovaním uhla zmiešavania Θ_W :

$$g \left(W_\mu^3 - \frac{g'}{g} B_\mu \right) = \frac{g}{c_W} Z_\mu \Rightarrow \tan \Theta_W = \frac{g'}{g} \quad (4.3.17)$$

To vedie k:

$$\begin{aligned} L_{NC} &= -\frac{g}{2c_W} \bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu \nu_{eL} \cdot Z_\mu + \frac{g}{2c_W} \bar{e}_L \gamma^\mu e_L \cdot Z_\mu \\ &+ g' (\bar{e}_L \gamma^\mu e_L + \bar{e}_R \gamma^\mu e_R) \cdot (-s_W Z_\mu + c_W A_\mu) = \\ &= -\frac{g}{2c_W} \bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu \nu_{eL} \cdot Z_\mu - \frac{g}{2c_W} \bar{e} \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - 4s_W^2 - \gamma^5) e \cdot Z_\mu \\ &+ \frac{g}{s_W} \bar{e} \gamma^\mu e \cdot A_\mu \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

Kde $e_Q = \frac{g}{s_W}$ je elektrický náboj elektrónu.

Vo všeobecnosti interakciu pre fundamentálny fermión so slabým izospinom T_3^f a nábojom Q_f (vyjadreným v elementárnych nábojoch) môžeme písať:

$$J_{em}^\mu A_\mu = -ieQ_f \bar{u}_f \gamma^\mu u_f \cdot A_\mu$$



$$J_{NC}^\mu Z_\mu = -i \frac{g}{2c_W} \bar{u}_f \gamma^\mu (v_f - a_f \gamma^5) u_f \cdot Z_\mu$$



$$v_f = T_3^f - 2Q_f s_W^2 \quad a_f = T_3^f$$

A pre **elektroslabý interakčný lagranžián leptónov** platí:

$$\begin{aligned} L_{EW}^{(l)} &= -\frac{g}{\sqrt{2}} \left(\bar{\nu} \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) e \cdot W_\mu^+ + \bar{e} \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \nu \cdot W_\mu^- \right) + \\ &- \frac{g}{2c_W} \bar{\nu} \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \nu \cdot Z_\mu + \frac{g}{2c_W} \bar{e} \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - 4s_W^2 - \gamma^5) e \cdot Z_\mu \\ &+ e_Q \bar{e} \gamma^\mu e \cdot A_\mu + h.c. + (mions) + (\tau - leptons) \dots \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

Zhrnutie

Náš systém bol na počiatku tvorený voľnými leptónmi 3 pokolení:

$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}$. V systéme týchto častíc sme realizovali lokálnu $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ -

symetriu takým spôsobom, že ľavé leptóny (leptón a jeho neutríno) vytvárajú **izodublety**

$\Psi_L^{(l)} = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \begin{pmatrix} \nu_l \\ l \end{pmatrix}, l = e, \mu, \tau$ zatiaľ čo pravé komponenty leptónov vytvárajú **izosinglety**

$\Psi_R^{(l)} = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \psi^{(l)}, l = e, \nu_e, \mu, \nu_\mu, \tau, \nu_\tau$ grupy $SU(2)$.

Požiadavka lokálnej $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ -symetrie

$\left(\exp(i g \epsilon_a t^a) \otimes \exp\left(i g \frac{Y}{2} \alpha\right), \text{ generátory grupy: } t^1, t^2, t^3, Y \right)$ si vyžaduje zavedenie

kompenzujúcej interakcie so 4 kalibračnými poliami – každému generátoru grupy jedno kalibračné pole: A^1, A^2, A^3 a B . Kompenzujúca interakcia sa zavádza zámenou:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + i g t_a A_\mu^a + i \frac{Y}{2} g' B_\mu$$

Namiesto kalibračných polí A^1, A^2, A^3 a B sme zaviedli 4 iné kalibračné polia, ktoré už majú bezprostredný fyzikálny význam:

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 \mp i A_\mu^2), \quad Z_\mu = c_w \cdot A_\mu^3 - s_w \cdot B_\mu$$

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 \pm i A_\mu^2), \quad A_\mu = s_w \cdot A_\mu^3 + c_w \cdot B_\mu$$

Kde $s_w = \sin \theta_w, c_w = \cos \theta_w, \theta_w = \arctg\left(\frac{g'}{g}\right)$.

Bozóny $W^\pm$ (kvantá polí W_μ^+ a W_μ^-) realizujú tzv. nabité prúdy (prechody $l \leftrightarrow \nu$), Z -bozóny realizujú neutrálne prúdy (interakcie neutrín a leptónov bez zmeny slabého izospinu: $\nu \leftrightarrow \nu$ a $l \leftrightarrow l$) a fotóny (kvantá polí A_μ) sprostredkujú elektromagnetickú interakciu.