

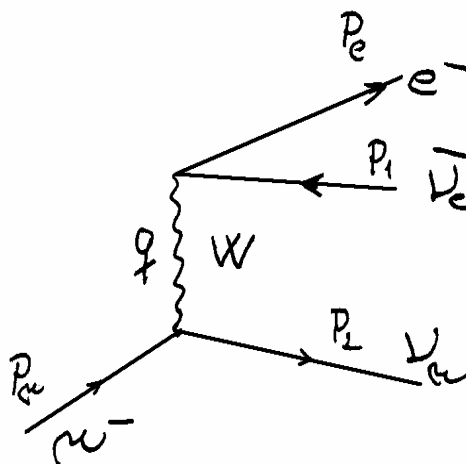
5. Slabé interakcie leptónov

9. 5. 2007

Poznanie pravidiel pre elektroslabé (EW) procesy nám umožňuje počítať amplitúdy rôznych EW-procesov pre leptóny a kvarky.

Obr.1: Rozpad miónu

$$\mu^- \rightarrow e^- \nu_e \nu_\mu$$



Pre amplitúdu rozpadu (v 1. ráde poruchovej teórie) platí:

$$M = \frac{-ig}{2\sqrt{2}} \left(\bar{\nu}_2 \gamma_\lambda (1 - \gamma_5) u_\mu \left(\frac{g^{\lambda\sigma} - \frac{q^\lambda q^\sigma}{M_W^2}}{q^2 - M_W^2} \right) \bar{u}_e \gamma_\sigma (1 - \gamma_5) \nu_1 \right) \quad (1.1)$$

Kde ν_1 a ν_2 sú spinory odpovedajúce neutrínam $\bar{\nu}_e$ a ν_μ

u_e a u_μ sú spinory odpovedajúce elektrónu a miónu.

Keďže $|q|^2 \ll M_W^2$ platí:

$$\frac{g^{\lambda\sigma} - \frac{q^\lambda q^\sigma}{M_W^2}}{q^2 - M_W^2} \rightarrow -\frac{g^{\lambda\sigma}}{M_W^2} \quad (1.2)$$

Ak označíme

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} \quad (1.3)$$

Potom pre amplitudu M dostávame:

$$M = \frac{-G_F}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_2 \gamma_\lambda (1 - \gamma_5) u_\mu \cdot \bar{u}_e \gamma^\lambda (1 - \gamma_5) \nu_1) \quad (1.4)$$

Výsledok (1.2) zodpovedá amplitúde počítanej na základe „klasickej“ (V-A)-teórie. Pre diferenciál pravdepodobnosti rozpadu miónu za jednotku času je:

$$d\Gamma = |M|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_\mu - p_e - \dots - p_n) \cdot \frac{1}{2E_\mu} \cdot \frac{1}{2E_e} \frac{1}{2E_1} \frac{1}{2E_2} \times \frac{d^3 p_e}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \quad (1.5)$$

Je potrebné vypočítať $|M|^2$. Ak komplexne združíme (1.4) dostaneme:

$$M^* = \frac{-G_F}{\sqrt{2}} (\bar{u}_\mu \gamma_\lambda (1 - \gamma_5) v_2 \cdot \bar{v}_1 \gamma^\lambda (1 - \gamma_5) u_e) \quad (1.6)$$

To pre $|M|^2$ dáva:

$$|M|^2 = \frac{1}{2} G_F^2 L_{\lambda\sigma}^{(\mu)} \cdot L_{(e)}^{\lambda\sigma} \quad (1.7)$$

kde

$$L_{\lambda\sigma}^{(\mu)} = \text{Tr} \{ v_2 \bar{v}_2 \gamma_\lambda (1 - \gamma_5) u_\mu \bar{u}_\mu \gamma_\sigma (1 - \gamma_5) \} \quad (1.8)$$

a

$$L_{(e)}^{\lambda\sigma} = \text{Tr} \{ u_e \bar{u}_e \gamma^\lambda (1 - \gamma_5) v_1 \bar{v}_1 \gamma^\sigma (1 - \gamma_5) \} \quad (1.9)$$

Tr je symbol stopy matice.

Výsledok:

$$|M|^2 = 2G_F^2 ((p_e - m_e s_e) \cdot p_2) ((p_\mu - m_\mu s_\mu) \cdot p_1) \quad (1.10)$$

Kde s_e a s_μ sú 4-vektory polarizácie elektrónu a miónu.

Dosadením $|M|^2$ do (1.5) a preintegrovaním cez hybnosti neutrín a zanedbáme hmotnosť elektrónu - dostaneme:

$$d\Gamma = \frac{\pi G_F^2}{3(2\pi)^5 m_\mu} d\Omega_e dE_e |\vec{p}_e| (1 - \vec{n} \cdot \vec{s}_e) E_e m_\mu^2 [(3m_\mu - 4E_e) + (m_\mu - 4E_e) \vec{n} \cdot \vec{s}_\mu] \quad (1.11)$$

Kde $\vec{n}$ je jednotkový vektor v smere pohybu elektrónu a $\vec{s}_e$ a $\vec{s}_\mu$ sú priestorové komponenty 4-vektorov polarizácie elektrónu a miónu.

Elektrón nadobudne maximálnu energiu ak obe neutrína sú emitované v jednom smere a elektrón v opačnom smere:

$$E_e^{\max} = \frac{m_\mu^2 + m_e^2}{2m_\mu} \quad (1.12)$$

Ak zavedieme $\varepsilon = E_e / E_e^{\max}$

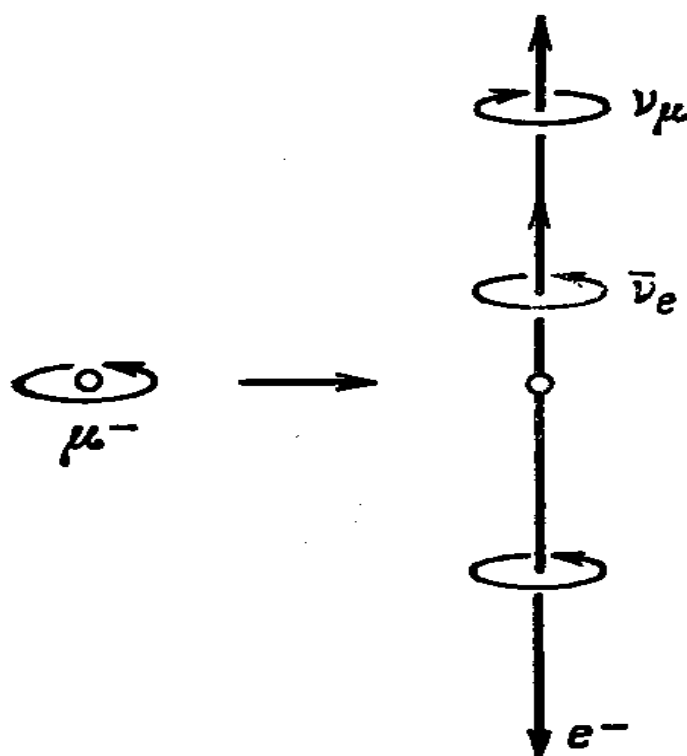
A a vyberieme smer spinu miónu v smere osi z , pre rýchlosť miónového rozpadu dostávame:

$$d\Gamma = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{24(2\pi)^3} 2\varepsilon^2(3-2\varepsilon) \left[1 + \left(\frac{1-2\varepsilon}{3-2\varepsilon} \right) \cos\theta \right] \left(\frac{1-\vec{n} \cdot \vec{s}_e}{2} \right) d\varepsilon \frac{\sin\theta d\theta d\varphi}{4\pi} \quad (1.13)$$

Energetické spektrum vyžiarených elektrónov je $n(\varepsilon) = 2\varepsilon^2(3-2\varepsilon)$.

Druhý faktor (v [...]) popisuje **asymetriu vyžiarenia elektrónov** vzhľadom na smer polarizácie miónu. Elektróny sú vyžarované prevážne proti smeru spinu miónu.

Tretí faktor (v (...)) popisuje **špirálnosť elektrónu** (priemet vektora polarizácie (spinu) do smeru pohybu). Z (1.13) je jasné, že uvedený faktor je v prípade úplnej ľavej polarizácie elektrónu rovný 1 a v prípade úplnej pravej polarizácie rovný 0. Teda spin vyžiarených elektrónov je orientovaný proti smeru ich pohybu.



Obr.2: Rozpad μ^- s $\varepsilon=1$. Spin elektrónu musí byť orientovaný ako spin μ^- (neutrína majú vzájomne opačne orientovaný spin) e^- je emitovaný proti smeru spinu μ^- .

Po preintegrovaní cez uhol a energiu elektrónov dostávame:

$$\Gamma = G_F^2 m_\mu^5 / (192\pi^3) \quad (1.14)$$

Dodatok A. Ľavé a pravé fermióny

Uvažujme relativisticky fermión ($E \gg m$) – platí preň:

$$\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)u(p) = u_L(p) \quad \text{a} \quad \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)u(p) = u_R(p) \quad \text{A.1}$$

kde

u_L a u_R sú fermiónové spinory s ľavou (spin orientovaný proti smeru pohybu) resp. pravou polarizáciou.

Preskúmame napr. u_L .

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{A.2}$$

Zoberme si riešenie DR pre elektrón s $E > 0$:

$$u^{(s)} = \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \chi^{(s)} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)u^{(s)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m}\right) \chi^{(s)} \\ -\left(1 - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m}\right) \chi^{(s)} \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 - \vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \chi^{(s)} \\ -(1 - \vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \chi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \vec{p}/|\vec{p}|$$

V relativistickom prípade

Ak si vyberieme pohyb elektrónu v smere osi z : $\vec{p} = (0, 0, p) \Rightarrow \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \sigma_3$. Pre fermión v stave $\chi^{(-)}$ (spin orientovaný proti smeru pohybu) resp. v stave $\chi^{(+)}$ platí:

$$\sigma_3 \chi^{(-)} = -\chi^{(-)} \quad \text{a} \quad \sigma_3 \chi^{(+)} = \chi^{(+)} \quad \text{A.4}$$

Predpokladajme, že fermión v stave $\chi^{(s)} = c_1 \chi^{(-)} + c_2 \chi^{(+)}$, z A.3 máme:

$$\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)u^{(s)} \approx \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 - \sigma_3)(c_1 \chi^{(-)} + c_2 \chi^{(+)}) \\ -(1 - \sigma_3)(c_1 \chi^{(-)} + c_2 \chi^{(+)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \chi^{(-)} \\ -c_1 \chi^{(-)} \end{pmatrix} \quad \text{A.5}$$

Z A.5 je evidentné, že $(1 + \gamma_5)$ bude naopak vyberať pravé komponenty ($\chi^{(+)}$).

Poznámka. Spinor $\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)u(p)$ predstavuje čisto ľavo-polarizovaný stav, len ak hmotnosť fermiónu je rovná 0. V prípade $m \neq 0$ je úplne ľavo-polarizovaný len v relativistickej limite ($E \gg m$), keď môžeme zanedbať hmotnosť.

Keď hmotnosť nezanedbávame v (A5) namiesto $(1 - \sigma_3)$ bude vystupovať

$$\left(1 - \left(|\vec{p}| / \left(\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}\right) + m\right) \sigma_3\right) \approx \left(1 - (1 - m/|\vec{p}|) \sigma_3\right), \quad \text{a teda stav } \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)u(p)$$

bude obsahovať aj malú prímes $\chi^{(+)}$ s váhou $c_2 \cdot m/|\vec{p}|$.

Dodatok B. Vektor polarizácie elektrónu

Uvažujme zväzok elektrónov orientovaný v smere osi z . Spin elektrónu je $\frac{1}{2}$, teda projekcia spinu na os z je $S_z = \pm 1/2$.

Polarizácia zväzku. Zväzok elektrónov je polarizovaný, ak stavy s $S_z = +1/2$ a $S_z = -1/2$ nie sú zaplnené rovnako. Polarizácia zväzku v smere osi z je

$$\xi_z = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-} \quad \text{B.1}$$

Kde N_+ (N_-) je počet stavov s $S_z = +1/2$ ($-1/2$).

Zväzok je úplne **polarizovaný** ak $|\xi_z| = 1$ a **nepolarizovaný** ak $\xi_z = 0$. Vo všeobecnosti častice môžu mať pozdĺžnu aj priečnu polarizáciu, teda sú charakterizované vektorom polarizácie $\vec{\xi}$.

Budeme uvažovať 2 prípady:

- Všetky častice sú polarizované rovnako, sú popísané jednou a tou istou funkciou (zväzok je v čistom spinovom stave).
- Rôzne častice zväzku sú polarizované rôzne - zodpovedajú im rôzne spinové funkcie (zväzok predstavuje štatistickú zmes rôznych čistých spinových stavov – tzv. zmiešaný stav (opisuje sa maticou hustoty).

Čistý spinový stav. Častica so spinom $\frac{1}{2}$ je popísaná 2-komponentnou spinovou funkciou:

$$\varphi = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi^+ = (a_1^*, a_2^*) \quad \text{B.2}$$

Normovanou na sledovne:

$$\varphi^+ \varphi = |a_1|^2 + |a_2|^2 = 1 \quad \text{B.3}$$

Keďže $|a_1|^2$ a $|a_2|^2$ predstavujú pravdepodobnosti nájsť časticu v stavoch s $S_z = +1/2$ resp. $S_z = -1/2$. Pre polarizáciu dostávame:

$$\xi_z = \frac{|a_1|^2 - |a_2|^2}{|a_1|^2 + |a_2|^2} = |a_1|^2 - |a_2|^2 = \varphi^+ \sigma_z \varphi \quad \text{B.4}$$

Teda polarizácia je stredná hodnota operátora σ_z . Pre vektor polarizácie máme:

$$\vec{\xi} = \varphi^+ \vec{\sigma} \varphi \quad \text{B.5}$$

Vektor polarizácie je strednou hodnotou operátor $\vec{\sigma}$

Stavy úplnej polarizácie. Spinové funkcie:

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{B.6}$$

popisujú stavy **úplnej polarizácie** v 2 opačných smeroch a vlnovú funkciu B.2 môžeme predstaviť ako

$$\varphi = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 \quad \text{B.7}$$

Smer vektora polarizácie. Uvažujme vstupnú $\vec{k}$ a výstupnú $\vec{k}'$ hybnosť elektrónu podstupujúceho interakciu. Z vektorov $\vec{k}$, $\vec{k}'$ a $\vec{\xi}$ môžeme vytvoriť nasledovné kombinácie: $\vec{\xi} \cdot \vec{k}$, $\vec{\xi} \cdot \vec{k}'$ a $\vec{\xi} \cdot (\vec{k} \times \vec{k}')$. Prvé 2 predstavujú pozdĺžnu polarizáciu (v smere $\vec{k}$ a $\vec{k}'$) a tretia predstavuje priečnu polarizáciu. Keďže $\vec{\xi} \sim \vec{\sigma}$ a prvé dve kombinácie menia znamienko pri priestorovej inverzii, tak to znamená, že vektor polarizácia musí byť kolmý na rovinu interakcie, teda musí byť v smere $\vec{\xi} \cdot (\vec{k} \times \vec{k}')$ ak interakcia je invariantná voči priestorovej inverzii. To platí však len v prípade, keď primárny zväzok je nepolarizovaný.

Pre 4-rozmerný opis stavu polarizácie zavedieme 4-vektor a^μ . V pokojovej sústave a^μ je totožné s $\vec{\xi}$, ktorý je pseudovektorom, preto aj a^μ je pseudovektorom. V pokojovej sústave, kde $a^\mu = (0, \vec{\xi})$ a $p^\mu = (m, 0)$ je vektor a^μ ortogonálny na p_μ . Preto aj v ľubovoľnej inej sústave bude platiť:

$$a_\mu p^\mu = 0 \quad \text{B.8}$$

$$a_\mu a^\mu = -\vec{\xi}^2 \quad \text{B.9}$$

Komponenty 4-vektora a^μ pre elektrón pohybujúci sa rýchlosťou $\vec{v} = \vec{p}/E$ dostaneme z komponent vektora v pokojovej sústave elektrónu prostredníctvom Lorentzovej transformácie:

$$a_0 = \frac{|\vec{p}|}{m} \xi_L, \quad \vec{a}_T = \vec{\xi}_T, \quad a_L = \frac{E}{m} \xi_L \quad \text{B.10}$$

Kde indexy L a T označujú komponenty vektorov $\vec{\xi}$ a $\vec{a}$ paralelné a kolmé na $\vec{p}$.

Vektorový zápis:

$$\vec{a} = \vec{\xi} + \frac{(\vec{\xi} \cdot \vec{p}) \vec{p}}{m(E + m)}, \quad a_0 = \frac{\vec{a} \cdot \vec{p}}{E} = \frac{\vec{\xi} \cdot \vec{p}}{m}, \quad \vec{a}^2 = \vec{\xi}^2 + \frac{(\vec{\xi} \cdot \vec{p})^2}{m^2} \quad \text{B.11}$$

Prípád zmiešaného stavu. Uvažujme prípad zväzku, stav častice je supepozíciou stavov $\varphi^{(n)} = a_1^{(n)} \varphi_1 + a_2^{(n)} \varphi_2$, pričom váha stavu $\varphi^{(n)}$ je w_n a jeho polarizácia $\xi^{(n)}$.

Pre polarizáciu zmiešaného stavu dostávame:

$$\begin{aligned} \vec{\xi} &= \sum_n w_n \vec{P}^{(n)} = \sum_n w_n \left[\left(a_1^{(n)*} \varphi_1 + a_2^{(n)*} \varphi_2 \right) \vec{\sigma} \left(a_1^{(n)} \varphi_1 + a_2^{(n)} \varphi_2 \right) \right] \\ &= \sum_{i,j} \sum_n w_n a_j^{(n)} a_i^{(n)*} \varphi_i^+ \vec{\sigma} \varphi_j \end{aligned} \quad \text{B.12}$$

Polarizačná matica hustoty. Zavedieme ju nasledovným vzťahom

$$\rho_{ij} = \sum_n w_n a_i^{(n)} a_j^{(n)*} = \overline{a_i^{(n)} a_j^{(n)*}} \quad \text{B.13}$$

Pre vektor polarizácie môžeme potom písať:

$$\vec{\xi} = \sum_{i,j} \rho_{ji} \varphi_i^+ \vec{\sigma} \varphi_j = \text{Tr}(\rho \vec{\sigma}) \quad \text{B.14}$$

Matica hustoty úplne charakterizuje polarizačné vlastnosti zväzku. Priamym výpočtom je možné dokázať aj opačný vzťah:

$$\rho = \frac{1}{2} (1 + \vec{\xi} \cdot \vec{\sigma}) \quad \text{B.15}$$

ktorý viaže maticu hustoty (matica 2×2) s vektorom polarizácie, pritom

$$\xi_i = \text{Tr}(\rho \sigma_i).$$

Relativistický prípad. V relativistickej teórii spin sa nezachováva (len celkový moment hybnosti). Matica hustoty môže byť definovaná len v pokojovej sústave elektrónu, kde ju možno vyjadriť cez spinor $u(p)$

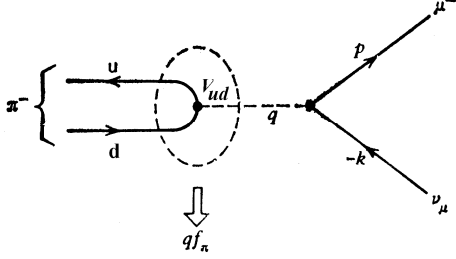
$$\rho_{ij} = \overline{u_i(p) u_j(p)} \quad \text{B.16}$$

Je možné ukázať, že v prípade zmiešaného stavu (čiastočná polarizácia) je možné nájsť nasledovný vzťah medzi maticou hustoty a 4-vektorom polarizácie:

$$\rho = \frac{1}{2} (\hat{p} + m)(1 - \gamma_5 \hat{a}) \quad \text{B.17}$$

Rozpad nabitých mezónov

Príkladom takeého rozpadu je rozpad piónu: $\pi^- \rightarrow l^- \bar{\nu}_l$.

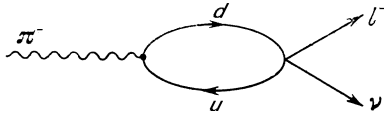


Obr. 1: Rozpad piónu π^- na kvarkovej úrovni.

Na kvarkovej úrovni sa rozpad π^- ($d \rightarrow u l^- \bar{\nu}_l$) podobá na rozpad $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$, avšak rozdiel je v tom, že u a d kvarky nepredstavujú sebou voľné kvarkové polia (ako je to v leptónovom prípade), ale viazaný stav silnej interakcie.

Vertex slabého prechodu $d \rightarrow u$ obsahuje element CKM-matice $V_{ud} = \cos \theta_1$ (θ_1 je Cabbibov uhol), ktorý charakterizuje pravdepodobnosť toho, že pri slabom prechode sa bude d -kvark viazať na u -kvark.

Vzhľadom na to, že pre odovzdanú hybnosť platí: $q^2 \ll m_w^2$ je možné prejsť ku kontaktnej interakcii t.j. nahradiť diagram na obr.1 diagramom na obr.2.



Obr. 2: Rozpad piónu π^- v kontaktnom priblížení.

Amplitúda rozpadu $\pi^- \rightarrow l^- \bar{\nu}_l$:

$$M = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \cos \theta_1 \cdot j_\mu^{(l)} J_\mu^{(h)} \quad (2.1)$$

kde $\cos \theta_1$ je Cabbibov uhol,

$j_\mu^{(l)} = \bar{u}_l \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_l$ je leptónový prúd

a $J_\mu^{(h)}$ je slabý hadrónový prúd.

Ak by pri rozpade piónu sa jednalo o voľné kvarky mohli by sme písať:

$$(J_\mu^{(h)})_{ideal} = \bar{u}_u \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u_d \quad (2.2)$$

Reálny π^- pión je ale viazaný systém $\bar{u}d$, preto pre hadrónový prúd je treba písať:

$$J_\mu^{(h)} = \langle 0 | J_\mu^+ | \pi^- \rangle, \quad J_\mu^+ = V_{ud} \cdot \bar{u} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) d \quad (2.3)$$

Kde

J_μ^+ je operátor slabého prúdu – u a d sú operátory u - a d - kvarkových polí, do ktorého sme zahrnuli aj maticový element V_{ud} .

Pri konštrukcii $J_\mu^{(h)}$ je treba brať do úvahy:

- π^- je pseudoskalárna častica (priestorová parita systému $q\bar{q} : -(-1)^L$)
- máme k dispozícii jediný 4-vektor: $q_\mu = k_\mu + p_\mu$ (k_μ a p_μ sú 4-hybnosti leptónov).

Slabý hadrónový prúd môžeme parametrizovať:

$$J_\mu^{(h)} = \langle 0 | J_\mu^+ | \pi^- \rangle = i f_\pi q_\mu \cdot \cos \theta_1 \quad (2.4)$$

Keďže π^- je pseudoskalárna častica a q_μ je polárny vektor, potom z $J_\mu^{(h)}$ sa uplatní len jeho axiálna časť (π^- je pseudoskalár a v kombinácii s axiálnym vektorom dáva polárny vektor).

Amplitúda slabého procesu $\pi^- \rightarrow l^- \bar{\nu}_l$:

$$M = i \frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos \theta_1 \cdot \bar{u}_l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v_\nu \cdot (p_\mu + k_\mu) \quad (2.5)$$

avšak z DR máme:

$$\bar{u}_l \gamma^\mu p_\mu = m_l \bar{u}_l \quad \text{a} \quad k_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v_\nu = (1 + \gamma_5) k_\mu \gamma^\mu v_\nu = 0 \quad (2.6)$$

Preto nakoniec platí:

$$M = i \frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos \theta_1 \cdot m_l \bar{u}_l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v_\nu \quad (2.7)$$

Pre ustrednený cez spiny kvadrát modulu amplitúdy platí:

$$\begin{aligned} |\overline{M}|^2 &= \frac{G_F^2}{2} f_\pi^2 \cos^2 \theta_1 m_l^2 \cdot Sp[(\hat{p} + m_l)(1 - \gamma_5)\hat{k}(1 + \gamma_5)] \\ &= 4G_F^2 f_\pi^2 \cos^2 \theta_1 \cdot m_l^2 \cdot (p \cdot k) \end{aligned} \quad (2.8)$$

kde

$\hat{p} = p_\mu \gamma^\mu$ $\hat{k} = k_\mu \gamma^\mu$ a využili sme normovacie podmienky pre spinory u a v a teorémy o stopách γ -matic.

V pokojovej sústave π -mezónu pre rozpadovú šírku platí:

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_\pi} |\overline{M}|^2 \cdot \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega} (2\pi)^4 \delta(q - p - k) \quad (2.9)$$

Pritom (pokojová sústava π -mezónu): $\vec{k} = -\vec{p}$ čo vedie k

$$p \cdot k = E\omega - \vec{p} \cdot \vec{k} = E\omega + \vec{k}^2 = \omega(E + \omega) \quad (2.10)$$

Preintegrujúc cez hybnosť leptónu (p) a použijúc $d^3k = 4\pi k^2 dk = 4\pi\omega^2 d\omega$ máme:

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{G_F^2 f_\pi^2 m_l^2 \cos^2 \theta_1}{(2\pi)^2 2m_\pi} \cdot \int \frac{d^3p \cdot d^3k}{E\omega} \delta(m_\pi - E - \omega) \delta(\vec{p} + \vec{k}) \omega(E + \omega) \\ &= \frac{G_F^2 f_\pi^2 m_l^2 \cos^2 \theta_1}{(2\pi)^2 2m_\pi} \cdot 4\pi \int d\omega \omega^2 \left(1 + \frac{\omega}{\sqrt{m_l^2 + \omega^2}} \right) \delta(m_\pi - \sqrt{m_l^2 + \omega^2} - \omega)\end{aligned}\quad (2.11)$$

Využijúc vlastnosti δ -funkcie:

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x - x_0) \quad \text{kde } f(x_0) = 0,$$

čo v našom prípade znamená:

$$\delta(m_\pi - \sqrt{m_l^2 + \omega^2} - \omega) = \frac{1}{1 + \frac{\omega_0}{\sqrt{m_\pi^2 + \omega_0^2}}} \delta(\omega - \omega_0) \quad \text{kde } \omega_0 = \frac{m_\pi^2 - m_l^2}{2m_\pi}, \quad (2.12)$$

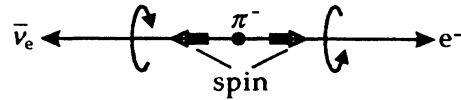
$$\text{čo pre rýchlosť rozpadu dáva: } \Gamma = \frac{G_F^2}{8\pi} f_\pi^2 \cos^2 \theta_1 \cdot m_\pi m_l^2 \cdot \left(1 - \frac{m_l^2}{m_\pi^2} \right)^2 \quad (2.13)$$

Pomer rozpadov : $\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e$ a $\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$:

$$R_0 = \frac{\Gamma(\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)} = \left(\frac{m_e}{m_\mu} \right)^2 \left(\frac{m_\pi^2 - m_e^2}{m_\pi^2 - m_\mu^2} \right)^2 = 1.28 \cdot 10^{-4} \quad (2.14)$$

Experimentálna hodnota pomeru je $R_{\text{exp}} = (1.232 \pm 0.003) \cdot 10^{-4}$. Keď korigujeme R_0 na radiačné korekcie dostaneme: $R_{\text{cor}} = R_0 (1 - 16.9 \cdot \alpha/\pi) = 1.24 \cdot 10^{-4}$, čo je vo veľmi dobrej zhode experimentom.

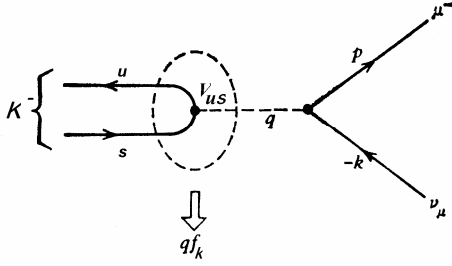
Obr.3: V dôsledku **V-A štruktúry** amplitúdy (prítomnosť faktora $1-\gamma_5$) vedie k potlačeniu rozpadu π^- na e^- oproti rozpadu na μ^- .



Hoci fázový objem pre rozpad na elektrón je väčší ako pre rozpad na mión, π sa rozpadá hlavne na μ . Dôvod je v nasledovnom : amplitúda tohoto rozpadu je $\sim m_l$ ($\Gamma \sim m_l^2$) a ak by $m_l \rightarrow 0 \Rightarrow \Gamma \rightarrow 0$ – to je výsledok faktora $(1-\gamma_5)$ preferujúceho ľavú polarizáciu elektrónu.. Avšak π^- -mezón má spin 0 a pri jeho rozpade ($\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$) v pokojovej sústave e^- a $\bar{\nu}_e$ idú v opačných smeroch ($\vec{p}_e = -\vec{p}_\nu$). V

dôsledku nulovej hmotnosti je $\bar{\nu}_e$ je pravo-polarizované (spin orientovaný v smere $\vec{p}_\nu$), preto aj e^- musí byť pravo-polarizovaný.

Rozpad kaónu: $K^- \rightarrow l^- \bar{\nu}_l$.



Obr. 3: Semileptónový rozpad kaónu na kvarkovej úrovni ($K^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$).

Semileptónový rozpad K^- je úplne analogicky rozpadu π^- , len je treba urobiť zámenu: $d \rightarrow s$, $V_{ud} \rightarrow V_{us} = \sin \theta_1$, $f_\pi \rightarrow f_k$ a $m_\pi \rightarrow m_k$. Teda je treba použiť vzťah 2.13 a urobiť vyššie uvedenú zámenu.

Pre pološírku rozpadu $K^- \rightarrow l^- \bar{\nu}_l$ potom platí:

$$\Gamma = \frac{G_F^2}{8\pi} f_K^2 \sin^2 \theta_1 \cdot m_K m_l^2 \cdot \left(1 - \frac{m_l^2}{m_K^2}\right)^2 \quad (2.15)$$

A pre pomer pološírok semileptónových rozpadov K a π dostávame:

$$\frac{\Gamma(K^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)} = \tan^2 \theta_1 \cdot \left(\frac{f_K}{f_\pi}\right)^2 \frac{m_K}{m_\pi} \left(\frac{1 - \frac{m_\mu^2}{m_K^2}}{1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}}\right)^2 \quad (2.16)$$

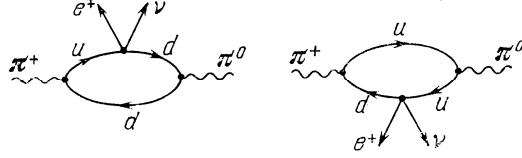
Zo zmeraného pomeru (2.16), poznajúc θ_1 z iných experimentov dostávame:

$$\frac{f_K}{f_\pi} = 1.28.$$

Rozpady mezón $\rightarrow$ mezón + leptóny ($M_A \rightarrow M_B l \nu$)

Príklady uvedených rozpadov:

$$\pi^+ \rightarrow \pi^0 l^+ \nu, \quad K^+ \rightarrow \pi^0 l^+ \nu, \quad K_L^0 \rightarrow \pi^- l^+ \nu, \quad \text{etc.}$$



Obr. 4: Rozpad $\pi^+ \rightarrow \pi^0 l^+ \nu$ na kvarkovej úrovni

Amplitúda rozpadu je (analogicky ako predtým):

$$M = \frac{G_F}{\sqrt{2}} j_\mu^{(l)} J^{(h)\mu} \quad (2.17)$$

Kde

$j_\mu^{(l)} = \bar{u}_\nu \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_l$ je leptónový prúd a hadrónový prúd $J^{(h)\mu}$ musíme skonštruovať z vektorov, ktoré máme k dispozícii. Pritom 4-vektor hadrónového prúdu musí byť nejakou kombináciou polárneho a axiálneho 4-vektora.

K dispozícii máme: k_A^μ a k_B^μ - 4-hybnosti počiatočného a konečného stavu mezónu.

Kinematické invarianty procesu sú:

$$k_A^\mu k_{A\mu} = m_A^2, \quad k_B^\mu k_{B\mu} = m_B^2 \quad \text{a} \quad q^2 = (k_A - k_B)^2$$

a teda q^2 je jediná kinematická premenná procesu.

Teda:

$$\langle M_B | J^\mu | M_A \rangle = N (f_A(q^2) k_A^\mu + f_B(q^2) k_B^\mu) \quad (2.18)$$

kde N je nejaký kalibračný faktor obsahujúci CKM element V_{ud} a f_A a f_B sú formfaktory, teda skalárne funkcie kinematických invariantov (v našom prípade q^2).

Ak uvažujeme vyššie zmienené rozpady s pseudo-skalárnym mezónom v počiatočnom i konečnom stave, potom vklad do amplitúdy rozptylu dá len vektorová časť prúdu J^μ . Pre hadrónový prúd môžeme písať:

$$\langle M_B | J^\mu | M_A \rangle = N (f_+(q^2) p^\mu + f_-(q^2) q^\mu) \quad (2.19)$$

Kde f_+ a f_- sú kombinácie f_A a f_B , $p^\mu = k_A^\mu + k_B^\mu$ a $q^\mu = k_A^\mu - k_B^\mu$.

V ďalšom si ukážeme, že **slabé formfaktory** mezónov f_+ a f_- súvisia s ich **elektromagnetickými formfaktormi** a že hypotéza zachovania vektorového prúdu vedie k platnosti $f_- = 0$.

Dodatok C. O počítaní $|M|^2$ v piónovom rozpade.

Amplitúda rozpadu piónu je daná vzťahom:

$$M = i \frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos \theta_1 \cdot m_l \bar{u}_l (1 - \gamma_5) v_\nu \quad \text{C.1}$$

Pre výpočet $|M|^2$ potrebujeme určiť M^* :

$$\begin{aligned} M^* = M^\dagger &= f_G (\bar{u}_l (1 - \gamma_5) v_\nu)^\dagger = f_G (u_l^\dagger \gamma^0 (1 - \gamma_5) v_\nu)^\dagger = f_G (v_\nu^\dagger (\gamma^0 (1 - \gamma_5))^\dagger u_l) \\ &= f_G v_\nu^\dagger \gamma^0 (1 - \gamma_5) u_l = f_G \bar{v}_\nu (1 - \gamma_5) u_l, \quad f_G = i \frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos \theta_1 m_l \end{aligned} \quad \text{C.2}$$

lebo využíjúc vlastnosti γ -matic dostávame:

$$(\gamma^0 (1 - \gamma_5))^\dagger = (1 - \gamma_5)^\dagger \gamma^{0\dagger} = (1 + \gamma_5) \gamma^0 = \gamma^0 (1 - \gamma_5)$$

Použijúc

$$\sum_{s_l} u_l \bar{u}_l = \hat{p} + m_l \quad \text{a} \quad \sum_{s_\nu} v_\nu \bar{v}_\nu = \hat{k}$$

Pre výpočet $|M|^2$ je dôležité spočítať:

$$\begin{aligned} \sum_{s_e s_\nu} (\bar{u}_l) (1 - \gamma_5) v_\nu \cdot \bar{v}_\nu (1 - \gamma_5) u_l &= \sum_{s_e s_\nu} (\bar{u}_l)_i (1 - \gamma_5)_{ij} (v_\nu)_j \cdot (\bar{v}_\nu)_k (1 - \gamma_5)_{km} (u_l)_m = \\ &= \sum_{s_e} (u_l)_m (\bar{u}_l)_i (1 - \gamma_5)_{ij} \sum_{s_\nu} (v_\nu)_j (\bar{v}_\nu)_k (1 + \gamma_5)_{km} = (\hat{p} + m_l)_{mi} (1 - \gamma_5)_{ij} \hat{k}_{jk} (1 - \gamma_5)_{km} \\ &= Sp[(\hat{p} + m_l)(1 - \gamma_5)\hat{k}(1 - \gamma_5)] \end{aligned} \quad \text{C.3}$$

Keď vychádzame z C.1 a C.2 pre $|M|^2$ nakoniec dostávame:

$$|M|^2 = \frac{G_F^2}{2} f_\pi^2 \cos^2 \theta_1 m_l^2 Sp[(\hat{p} + m_l)(1 - \gamma_5)\hat{k}(1 - \gamma_5)] \quad \text{C.4}$$