Základné pojmy matematickej štatistiky

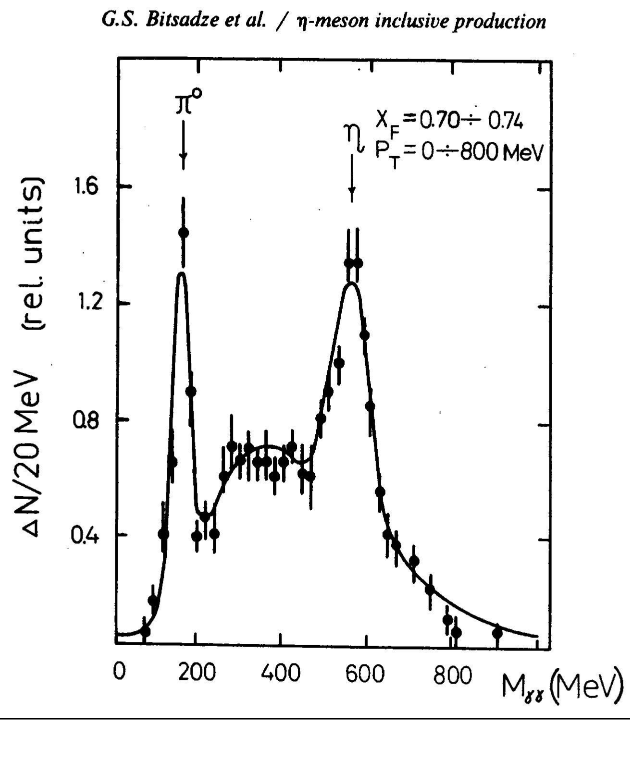
Matematická štatistika sa zaoberá štúdiom prijatia rozhodnutí v tzv. podmienkach neurčitosti, t.j. vtedy, keď určité rozhodnutie závisí od náhodnej udalosti, pričom nie je známe, ktorý zo zákonov rozdelenia pravdepodobnosti pôsobí v danom prípade.

Uvažujme prípad , keď máme urobiť rozhodnutie závisiace od náhodnej udalosti, avšak nepoznáme ani súhrn podmienok γ určitého experimentu, ani to, ktorý zo zákonov pravdepodobnosti pôsobí v danom prípade. Vtedy je nutné realizovať experiment na základe meraní určitých veličín a za pomoci určitých metód urobiť príslušné závery.

Fyzikálny príklad

Uvažujme fyzikálny experiment zameraný na štúdium mezónov rozpadajúcich sa na 2 gama kvantá – napr.: $K^- p \rightarrow \gamma\gamma + X$.

- Invariantná hmotnosť $m_{\gamma\gamma} = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2$ bude predstavovať náhodnú veličinu charakterizujúcu náš experiment, pričom ***jej odpovedajúci pravdepodobnostný zákon nepoznáme***..
- Realizácie tejto náhodnej veličiny sa získavajú opakovaním experimentu.
- Výsledkom experimentu je rozdelenie $\boldsymbol{m_{\gamma\gamma}}$.



Obr. 1: spektrum invariantných hmotností γγ-parov charakterizujúce daný γγ-experiment

Predpoklad:

- Poznáme rozlíšenie nášho detektora, t.j. poznáme závislosť σ od hmotnosti $\boldsymbol{M}$ rozpadajúcej sa častice sa na $\gamma\gamma$.
- Poznáme hmotnosť prvej častice (π^0–mezón), teda poznáme jemu zodpovedajúce rozdelenie hustoty pravdepodobnosti invariantnej hmotnosti $\boldsymbol{m}_{\gamma\gamma}$.
- Nepoznáme hmotnosť druhej častice (η–mezón) a teda ani jemu zodpovedajúce rozdelenie hustoty pravdepodobnosti.

Možné úlohy, ktoré je treba riešiť metódami matematickej štatistiky:

1. Preveriť hypotézu, že prvou časticou je π^0–mezón – teda pre známe rozdelenie hustoty pravdepodobnosti zistiť nakoľko je pravdepodobná hypotéza , že v experimente sa realizuje rozdelenie $\boldsymbol{m}_{\gamma\gamma}$ zodpovedajúce π^0–mezónu.
2. Nájsť hustotu rozdelenia pravdepodobnosti pre druhú časticu, teda nájsť zákon pravdepodobnosti, ktorý popisuje jej prejavenie sa v experimente. Prakticky nájsť hmotnosť skúmanej častice , zodpovedajúcu σ rozdelenia $\boldsymbol{m}_{\gamma\gamma}$., či sa jedná o jednu časticu a pod.

Poznámka**:* Vyššie spomínaný $\gamma\gamma$-experiment prakticky delíme na 2 sub-experimenty: v rámci prvého ($m_{\gamma\gamma} <$ 300 MeV) sa rieši ***úloha 1 a v rámci druhého sub-experimentu ($m_{\gamma\gamma} >$ 300 MeV) sa rieši ***úloha 2***. Riešenie problému si vyžaduje prijať a testovať hypotézu o pozadí, t.j. o rozdelení $m_{\gamma\gamma}$ v prípade, že γ-kvantá nie sú geneticky spojené (nepochádzajú z rozpadu tej istej častice). Pozadie je možné preskúmať metódou MC, využijúc pritom aj možnosť iteračného prístupu.

Niekoľko pojmov…

Náhodný výber

Predpokladajme, že určitý experiment sme *n*-krát opakovali za tých istých podmienok , a že sme získali **n** na sebe nezávislých pozorovaní $x_1, \dots x_n$ určitej veličiny. Môžeme ich považovať za realizácie určitej náhodnej veličiny ξ charakterizujúcej náš prípad.

N-ticu $(x_1, \dots x_n)$ môžeme považovať tiež za realizáciu vektorovej náhodnej premennej $\Xi=(\xi_1,\dots, \xi_n)$, ktorej zložky ξ_i , $i=1..n$ sú nezávislé a majú to isté rozdelenie pravdepodobnosti ako náhodná premenná ξ s distribučnou funkciou F(x) charakterizujúca základný súbor.

Náhodný vektor $(\xi_1,\dots, \xi_n)$ sa nazýva ***jednoduchým náhodným výberom*** zo základného súboru. *N*-tica hodnôt $(x_1, \dots x_n)$ sa nazýva realizáciou tohoto náhodného výberu.

Výberová funkcia.

Je to ľubovoľná reálna funkcia náhodného výberu Ξ teda $g(\xi_1,\dots, \xi_n)$ - je to tiež náhodná veličina.

Dôležité výberové funkcie. Nech náhodná premenná ξ má distribučnú funkciu $F(x)$ a nech $E(\xi) = a$ a $D(\xi) = \sigma^2$. Nech $\Xi=(\xi_1,\dots, \xi_n)$ je náhodný výber o rozsahu **n** (>1) a nech výberová funkcia je:

a) $g(\xi_{1,\dots,}\xi_n)=\bar{\xi}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$, po tom ju nazývame ***výberovým aritmetickým priemerom***, pričom platí: $E(\bar{\xi})=a$, $D(\bar{\xi})=\frac{\sigma^2}{n}$

b) $h(\xi_{1,\dots,}\xi_n)=s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i-\bar{\xi}\right)^2$, potom ju nazývame ***výberovou disperziou,*** pričom platí: $E(s^2)=\frac{n-1}{n}\cdot\sigma^2$.

Štatistický odhad

Výberová funkcia $g(\xi_1,\dots, \xi_n)$, ktorá má tú vlastnosť, že parametre jej rozdelenia súvisia s určitým parametrom θ základného súboru, nazývame ***štatistickým odhadom*** daného parametra.

Štatistický odhad, ktorého stredná hodnota sa rovná hodnote odhadovaného parametra sa nazýva ***neodchýleným štatistickým odhadom***

Kvantil.

Nech F(x) je distribučná funkcia spojitej náhodnej premennej ξ a nech je dané číslo $\alpha \in (0,1)$. Ak číslo x_α je riešením pravdepodobnostnej rovnice:

$$F(x_\alpha) = \alpha \quad \text{t.j.} \quad P(\xi < x_\alpha) = \alpha \qquad (2.1),$$

potom x_α nazývame ***$\alpha \times$100 %-ným kvantilom.***

Testovanie hypotéz

Interval spoľahlivosti

Predpoklad:

experiment je charakterizovaný náhodnou premennou ξ s normálnym rozdelením ***$N(x,a,\sigma^2)$.*** Pritom poznáme σ^2 $(=\sigma_o^2)$ avšak nepoznáme a .

Realizujme n-krát experiment s výsledkami $x_1, x_2, \ldots x_N$, potom:

- $(x_1, x_2, \ldots x_N)$ predstavuje realizáciu náhodného výberu $\Xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$;
- $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ je realizácia výberového aritmetického priemeru $\bar{\xi}$.

Odhad strednej hodnoty ***a*** je možné urobiť na základe realizácie $\bar{\xi}$ riešením pravdepodobnostnej rovnice:

$$P(|a - \bar{\xi}| \geq k_\alpha) = \alpha \qquad (2.2)$$

kde $\alpha \in (0,1)$ je dané číslo a hľadáme $\boldsymbol{k_\alpha}$.

Z (2) vyplýva:

$$P(a - k_\alpha < \bar{\xi} < a + k_\alpha) = 1 - \alpha \qquad (2.2b)$$

$$\Downarrow$$

$$N\left(a + k_\alpha, a, \frac{\sigma^2}{n}\right) - N\left(a - k_\alpha, a, \frac{\sigma^2}{n}\right) = 1 - \alpha \qquad (2.2c)$$

$$\Downarrow$$

$$N\left(a + k_\alpha, a, \frac{\sigma^2}{n}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} \qquad (2.2d)$$

$$N\left(\frac{k_\alpha\sqrt{n}}{\sigma},0,1\right)=1-\frac{\alpha}{2} \qquad (2.3)$$

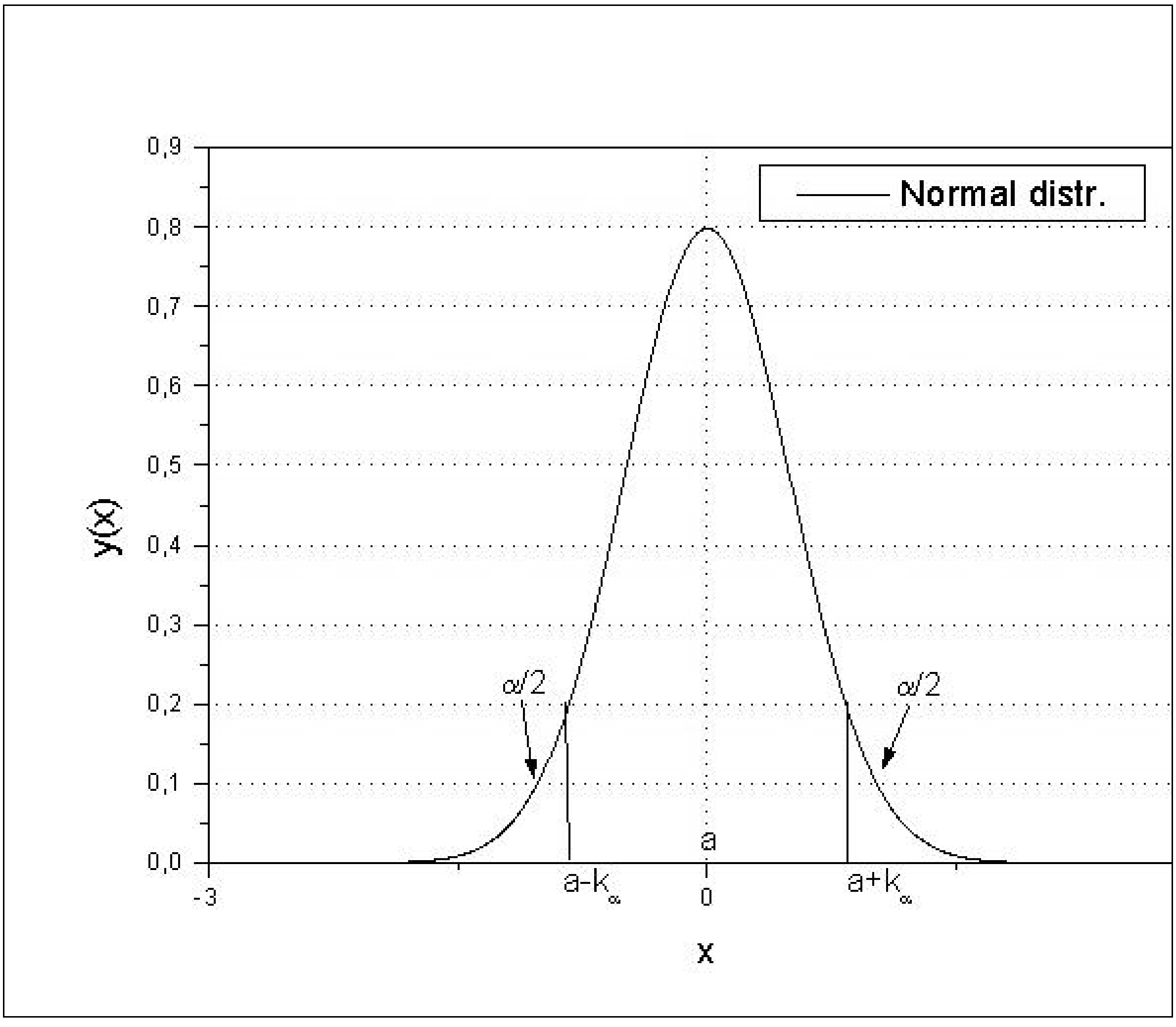
Rovnica (2.3) predstavuje rovnicu pre $(1-\alpha/2)\times 100\%$ kvantil.
Označme si:

$$u_{1-\frac{\alpha}{2}}=\frac{k_\alpha\sqrt{n}}{\sigma} \qquad (2.4)$$

potom pre ***interval spoľahlivosti pre parameter a*** s koeficientom spoľahlivosti $1-\alpha$ dostávame:

$$\left|\bar{\xi}-a\right|<k_\alpha=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot u_{1-\alpha/2}$$

$$\bar{\xi}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot u_{1-\alpha/2}<a<\bar{\xi}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot u_{1-\alpha/2} \qquad (2.5)$$



Obr. 2: Interval spoľahlivosti pre odhad parametra *a* s koeficientom spoľahlivosti *1-α*

Metóda najmenších štvorcov

Pri analýze dát sa často stáva, že máme model, ale nepoznáme jeho všetky parametre, teda forma hustoty rozdelenia pravdepodobnosti (h.r.p.) je známe no nepoznáme všetky jej parametre. Napr. Skúmaná náhodná veličina má normálne rozdelenie, avšak nepoznáme jej strednú hodnotu resp. disperziu.

Predpokladajme, že v bodoch $x_1 ,\dots, x_n$ sme merali nezávislé náhodné veličiny $y_1 ,\dots, y_n$ s disperziami σ^2_i , $i=1\dots n$. Teda $\vec{x}$ je dané (nezávisle premenná) a $\vec{y}$ je náhodný výber, ktorý chceme použiť na odhad závislosti $\boldsymbol{E(y)=f(x)}$. Nech teoretický model predpovedá závislosť $\boldsymbol{f(x;\ \vec{\theta}\ )}$ kde $\vec{\theta}$ je súbor L parametrov, ktoré chceme odhadnúť.
Parametre $\vec{\theta}$ sa nájdu minimalizáciou nasledovnej veličiny:

$$L_{sq} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i - f(x_i, \vec{\theta})}{\sigma_i} \right)^2 = \min \qquad (2.6)$$

Vo všeobecnosti merané veličiny môžu byť skorelované. V tomto prípade váhovou maticou (namiesto $1/\sigma_i^2$ v prípade nekorelovaných veličín) je inverzná kovariačná matica:

$$L_{SQ} = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\left(y_i - f(x_i, \vec{\theta}) \right) \cdot V_{i,j}^{-1} \cdot \left(y_i - f(x_i, \vec{\theta}) \right) \right) \qquad (2.7)$$

alebo vo vektorovom formalizme:

$$L_{SQ} = \left(\vec{y} - \vec{f} \right)^T \cdot V^{-1} \cdot \left(\vec{y} - \vec{f} \right)$$

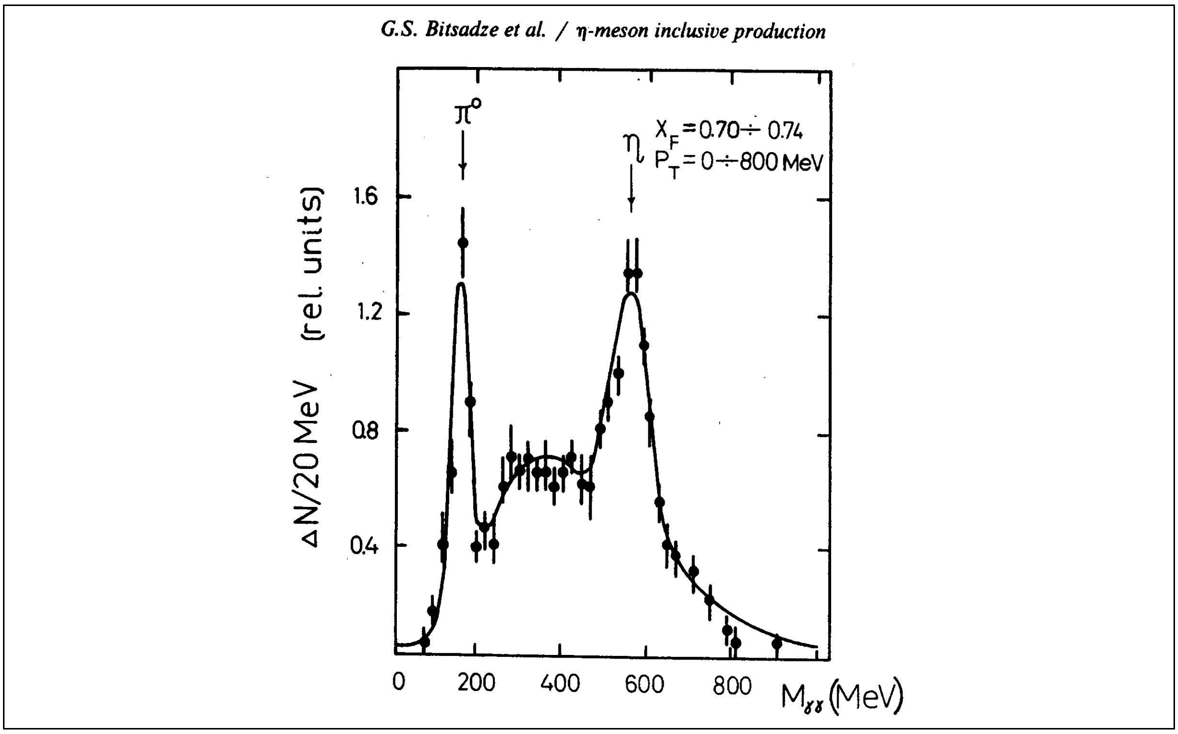
kde (2.8)

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \cdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} \sigma^2_{1,,1} & \sigma^2_{1,2} & \cdots & \sigma^2_{1,n} \\ \sigma^2_{2,1} & \sigma^2_{2,2} & \cdots & \sigma^2_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma^2_{n,1} & \sigma^2_{n,2} & \cdots & \sigma^2_{n,n} \end{bmatrix}$$

Podmienka minima, z ktorej vyplývajú rovnice pre hľadané parametre $\vec{\theta}$ sú:

$$\frac{\partial L_{SQ}}{\partial \theta_1} = 0 \qquad \frac{\partial L_{SQ}}{\partial \theta_2} = 0 \quad \cdots \quad \frac{\partial L_{SQ}}{\partial \theta_L} = 0 \qquad (2.9)$$

Príklad: Uvažujme vyššie spomínaný $\gamma\gamma$-experiment. Invariantná hmotnosť $M_{\gamma\gamma}$



Obr. 3: Spektrum invariantných hmotností $m_{\gamma\gamma}$ daného $\gamma\gamma$-experimentu obsahuje $\gamma\gamma$-páry od rozpadu π^0, η a neskorelované $\gamma\gamma$-páry

geneticky spojených kvánt γ patrí buď π^0-mezónu (normálne rozdelenie) alebo η-mezónu (normálne rozdelenie). Invariantná $M_{\gamma\gamma}$ geneticky nespojených kvánt γ patrí pozadiu (gamma funkcia). Náš model (hypotéza) vyzerá preto nasledovne:

$$f(x;\vec{\theta}) = c_1 \cdot G(x; m_\pi, \sigma_\pi) + c_2 \cdot G(x; m_\eta, \sigma_\eta) + (1 - c_1 - c_2) \cdot \Gamma(x; \alpha, \beta) \qquad (2.10)$$

Vektor parametrov : $\vec{\theta} = \left(c_1, c_2, m_\pi, \sigma_\pi, m_\eta, \sigma_\eta, \alpha, \beta\right)$

Nezávisle premenná x_i : stredné hodnoty binov histogramu

Nezávisle náhodné premenné y_i : obsah jednotlivých binov histogramu.

Disperzie n.p. y_i : $\sigma_i^2 = y_i$

Príklad: Predpokladajme lineárny model (***f(x)=a+bx***) pre prípad súboru nekorelovaných bodov: $(x_i, y_i \pm \sigma_i)$ $i=1,\ldots,a$
Potom

$$L_{SQ} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i - (a + bx_i)}{\sigma_i} \right)^2 \qquad (2.11)$$

Z rovníc:

$$\frac{\partial L_{SQ}}{\partial a} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial L_{SQ}}{\partial b} = 0 \qquad (2.12)$$

dostávame:

$$\begin{aligned} a &= \frac{S_y \cdot S_{xx} - S_x \cdot S_{xy}}{D} \\ b &= \frac{S_1 \cdot S_{xy} - S_x \cdot S_y}{D} \end{aligned} \qquad (2.13)$$

kde

$$S_1 = \sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} \qquad S_x = \sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2} \qquad S_{xx} = \sum_i \frac{x_i \cdot x_i}{\sigma_i^2}$$

$$(2.14)$$

$$S_y = \sum_i \frac{y_i}{\sigma_i^2} \qquad S_{xy} = \sum_i \frac{x_i \cdot y_i}{\sigma_i^2} \qquad D = S_1 \cdot S_{xx} - S_x^2$$

Disperziu (varianciu) parametrov parametrov $\vec{\theta}$ (v uvedenom prípade $\vec{\theta} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$) získame nasledovne:

$$V(\vec{\theta}) = S \cdot V(\vec{y}) \cdot S^T \qquad (2.15)$$

kde

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial a}{\partial y_n} \\ \frac{\partial b}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial b}{\partial y_n} \end{pmatrix} \qquad (2.16)$$

Konkrétne pre náš prípad:

$$V(\vec{\theta}) = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} S_{xx} & -S_x \\ -S_x & S_1 \end{pmatrix} \qquad (2.17)$$

Metóda maximálnej pravdepodobnosti

Princíp: vyberáme takú hypotézu, ktorá dáva najväčšiu pravdepodobnosť pozorovaným udalostiam.
Uvažujme náhodnú premennú so spojitou h.r.p $\boldsymbol{p(x/\theta)}$ kde θ je parameter ($\boldsymbol{x/\theta}$ xdôrazňuje, že sa jedná o podmienenú pravdepodobnosť mať výsledok $\boldsymbol{x}$ pri hodnote parametra θ).
Ak máme náhodný výber o rozsahu $\boldsymbol{n}$, potom mu prislúcha h.r.p.:

$$P(x_1,...,x_n)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i\mid\theta) \tag{2.18}$$

Hľadaný parameter $\boldsymbol{\theta}$ má pri daných realizáciách $\boldsymbol{x_1,\dots,\ x_n}$ nasledovnú (podmienenú) pravdepodobnosť:

$$l(\theta\mid x)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i\mid\theta)$$

$$Log(l)=L=\sum_{i=1}^{n}Log\big(p(x_i\mid\theta)\big) \tag{2.19}$$

Hodnota parametra θ sa získavá z podmienky maxima $\boldsymbol{L}$:

$$\frac{\partial L}{\partial\theta}=0 \tag{2.20}$$

Príklad:
Uskutočnili sme a $\boldsymbol{n}$ pokusov s výsledkami $\boldsymbol{x_1,\dots,\ x_n}$, pričom náhodná premenná charakterizujúca náš experiment má normálne rozdelenie pravdepodobnosti, pričom nepoznáme jeho strednú hodnotu a disperziu:

$$p(x\mid\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\cdot\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{2.21}$$

Pre logaritmickú pravdepodobnosť (po vynechaní normovacích faktorov):

$$L=\log(l)=-\frac{n\log\sigma^2}{2}-\frac{\sum_i(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} \tag{2.22}$$

Na základe:

$$\frac{\partial L}{\partial\mu}=0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial L}{\partial\sigma^2}=0 \tag{2.23}$$

dostávame:

$$\hat{\mu}=\frac{\sum_i x_i}{n} \qquad \hat{\sigma}^2=\frac{\sum_i(x_i-\hat{\mu})^2}{n} \tag{2.24}$$

3. Modelovanie rozdelení

3.1 Rovnomerné rozdelenie

Základom modelovania je ***náhodná premenná α s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti v intervale (0,1)***:

$$p_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1) \\ 0 & x \notin (0,1) \end{cases} \tag{3.1}$$

Prechod k všeobecnému prípadu, t.j. k náhodnej premennej β s rovnomerným rozdelením v intervale (a,b):

$$\beta = a + (b-a)\cdot\alpha \tag{3.2}$$

Podstata modelovania rovnomerného rozdelením pravdepodobnosti v intervale (0,1):
Majme veľké celé číslo $\boldsymbol{P}$ a postupnosť $\{\boldsymbol{x_k}, k=0,1,\ldots,\}$, ktorú sme dostali na základe rekurntného vzťahu:

$$x_{i+k} = \sum_{j=0}^{k-1} b_j \cdot x_{i+j} + \theta \quad (\mathrm{mod}\, P) \tag{3.3}$$

kde $\boldsymbol{b_j}$ a θ sú celé (konštanty), potom pseudonáhodná postupnosť:

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \quad \text{kde } \alpha_i = x_i / P \tag{3.4}$$

má vlastnosti postupnosti realizácií náhodnej premennej rovnomerne rozdelenej v (0,1).

Najjednoduchší prípad:

$$\boldsymbol{k=1} \text{ a } \boldsymbol{\theta=0} \qquad x_{i+1} = b\cdot x_i \quad (\mathrm{mod}\, P); \quad i = 0,1,\cdots \tag{3.5}$$

Vektorová náhodná premenná s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti v intervale $(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times\ldots\times(a_k,b_k)$.

Takúto náhodnú veličinu je možné realizovať na základe $\{\alpha_i\}_{i=1}^k$, kde α_I je rovnomerne rozdelené v (0,1) :

$$\vec{\beta} = \left[a_1 + (b_1 - a_1)\cdot\alpha_1 + \cdots + a_k + (b_k - a_k)\cdot\alpha_k\right] \tag{3.6}$$

Realizácia na počítači

CERNLIB: ***RNDM, RANLUX***

Použitie

X = RNDM(V)

Resp.

Call RANLUX(xn,n) ! dimenzia pole ***xn*** musí byť $\geq \boldsymbol{n}$.

3.2 Všeobecné metódy modelovania

Jednorozmerná náhodná premenná.

Majme náhodnú premennú ξ s distribučnou funkciou ***F(x)*** a náhodnú premennú α s rovnomerným rozdelením v (0, 1). Ak ξ' je riešením rovnice:

$$\int_{-\infty}^{\xi'} dF(x) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \xi' = F^{-1}(\alpha) \qquad (3.7)$$

potom ξ' je rozdelená v súlade s distribučnou funkciou *F(x)*, teda $\xi'=\xi$ **.**

Vektorová náhodná premenná.

Nech náhodné premenné $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k$ majú distribučnú funkciu $F(x_1,x_2,...,x_k)$ a

$$F_1(x_1) = P(\xi_1 < x_1) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} dF(x_1,...,x_k) = \int_{-\infty}^{x_1} dx_1' \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_k \; p(x_1', x_2, \dots x_k)$$

$$F_2(x_1,x_2) = P(\xi_2 < x_2 \mid x_1) = \frac{\int_{-\infty}^{x_2} dx_2' \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_k \; p(x_1, x_2', \dots x_k)}{\int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_k \; p(x_1, x_2, \dots x_k)} \qquad (3.8)$$

$$F_k(x_1,x_2,\dots x_k) = P(\xi_k < x_k | x_1, \dots x_{k-1}) = \frac{\int_{-\infty}^{x_k} dx_k' \; p(x_1,x_2,\dots x_k')}{\int_{-\infty}^{\infty} dx_k \; p(x_1,x_2,\dots x_k)}$$

potom veličiny $\xi'_1, \xi'_2, ..., \xi'_k$, ktoré sú riešením postupnosti rovníc:

$$\begin{aligned} F_1(\xi_1') &= \alpha_1 \\ F_2(\xi_1', \xi_2') &= \alpha_2 \\ &\dots \\ F_k(\xi_1', \xi_2', \dots \xi_k') &= \alpha_k \end{aligned} \qquad (3.9)$$

sú rozdelené v súlade s funkciou $F(x_1,x_2,...,x_k)$.

Príklady

1. Doba života miónu τ :

Náhodná premenná τ má distribučnú funkciu $F(x) = 1 - \exp(-\lambda\, x)$. Vychádzajúc z rovnice (3.7) máme:

$$\int_{-\infty}^{\tau} dF(x) = F(\tau) = \alpha \quad \leftarrow \text{rovnomerne rozdelené v (0, 1)}$$

$$1 - \exp(-\lambda\, \tau) = \alpha \quad \Rightarrow \quad \tau = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha)$$

resp.

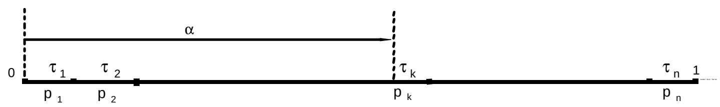
$$\tau = -\frac{1}{\lambda}\ln(\alpha)$$

lebo $1-\alpha$ je náhodná premenná rovnomerne rozdelená v intervale (0,1).

2. Majme ***diskrétnu náhodnú premennú*** ξ nadobúdajúcu hodnoty $\{\tau_i\}$ s pravdepodobnosťami $\{p_i\}$, $i = 1,2 \ldots$, potom pre realizáciu ξ platí: $\xi = \tau_i$, kde k je dané nerovnosťou:

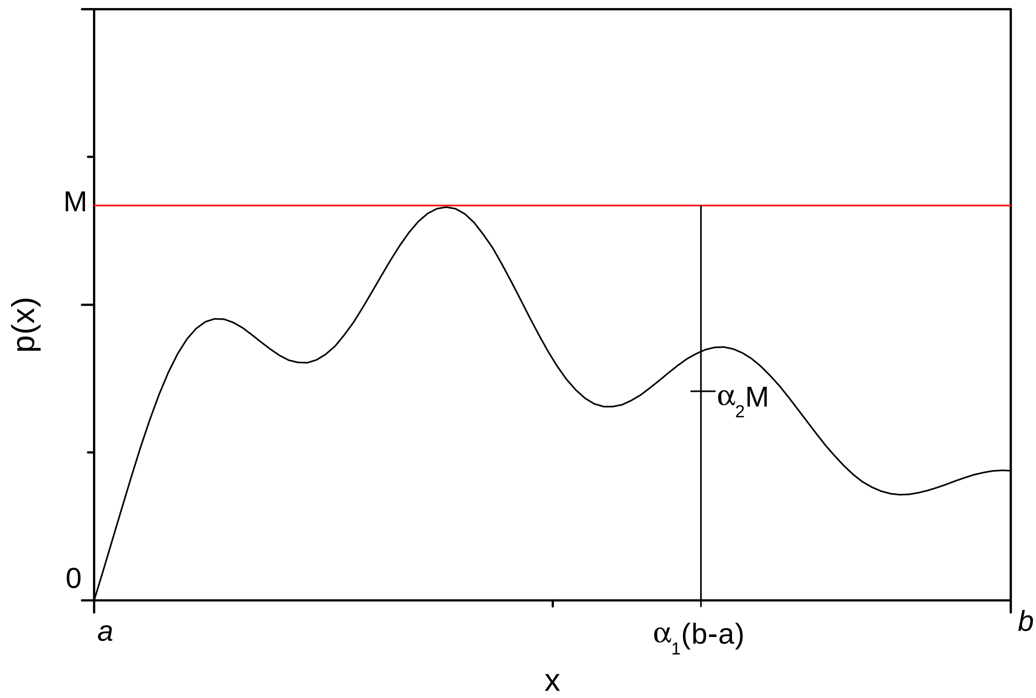
$$\sum_{j=1}^{k-1} p_j \le \alpha < \sum_{j=1}^{k} p_j \quad .$$

Geometrická interpretácia:



Obr. 4: Generovanie diskrétnej náhodnej premennej.

Majme náhodnú premennú ξ s hustotou pravdepodobnosti $p(x)$ definovaná v $D \equiv (a,b)$ takú, že $p(x)$ je v D ohraničená, t.j. pre každé $x \in D \Rightarrow \; p(x) \le M$.



Obr. 5: Generovanie náhodnej premennej so zložitou hustotou pravdepodobnosti .

Generujme α_1 a α_2, kde α_i je rovnomerne rozdelená na (0,1) a definujme :

$$\begin{aligned} x &= a + (b-a)\alpha_1 \\ y &= \alpha_2 M \end{aligned} \tag{3.10}$$

ak $y \le p(x) \Rightarrow$ x je realizácia ξ, ak nie pokus opakujeme. Takýmto spôsobom konštruovaná postupnosť veličín x je postupnosťou realizácií ξ.

Realizácia náhodnej veličiny ξ:

1. generujeme náhodný vektor $(\, a+(b-a)\alpha_1,\ \alpha_2 M\,)$;

2. prvú komponentu považujeme za realizáciu ξ, ak druhá komponenta spĺňa podmienku

$$\alpha_2 M < p(x) \tag{3.11}$$

Dôkaz:

Náhodný vektor $(\xi',\eta') \equiv (\, a+(b-a)\alpha_1,\ \alpha_2 M\,)$ je rovnomerne rozdelený v $(a,b)\times(0,M)$. Ak prejdeme k náhodnému vektoru $(\xi,\eta) \equiv (\xi',\eta')\,|\,\alpha_2 M < p(x)$, potom tento náhodný vektor je rovnomerne rozdelený v oblasti G $\equiv (a,b) \times (\, 0,\ p(x)\,)$ a jeho distribučná funkcia je

$$f_2(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y)\in G\\ 0 & (x,y)\notin G\end{cases} \tag{3.12}$$

Pre distribučnú funkciu ξ platí:

$$F'(x)=P(\xi<x)=\int_{-\infty}^{x}dt\int_{-\infty}^{\infty}du\cdot f_2(t,u)=\int_{-\infty}^{x}dt\int_{-\infty}^{p(t)}du=\int_{a}^{x}p(t)\,dt=F(x) \tag{3.13}$$

q.e.d.

Metóda rejekcie (odmietania)

Veta 1. Nech $\varphi(x)=\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ je nezáporná funkcia definovaná a integrovateľná v n–mernom kvádri $D\equiv\{a_i\le x_i\le b_i\}_{i=1}^{n}$ a pritom $\varphi(x)\le M$ pre každé $x\in D$, kde M je konštanta . Ďalej nech $(\alpha_1',\ldots,\alpha_n')$ je vektorová náhodná premenná s rovnomerným rozdelením v D a α je náhodná premenná s rovnomerným rozdelením v *(0, 1)*, potom hustota zodpovedajúca podmienenej pravdepodobnosti

$$P\left\{\alpha_i'<x_i, i=1,\ldots,n|\varphi(\alpha_i',\ldots,\alpha_n')\ge\alpha M\right\} \tag{3.14}$$

je totožná s $c\cdot\varphi(x_1,\ldots,x_n)$, kde c je normovacia konštanta.

Dôkaz:
Hustota pravdepodobnosti pre vektorovú náhodnú premennú $(\alpha_1',\ldots,\alpha_n')$ je $c\cdot\chi(t_1,\ldots,t_n)$ kde χ je indikátor oblasti D ($\chi(t_1,\cdots,t_n)=\begin{cases}1 & (t_1,\cdots,t_n)\in D\\ 0 & (t_1,\cdots,t_n)\notin D\end{cases}$). Pre vyššie zmienenú podmienenú pravdepodobnosť dostávame:

$$\begin{aligned}&P\{x_i\le\alpha_i'<x_i+\partial x_i; i=1..n \mid \varphi(\vec{\alpha}')\ge M\alpha\}=\\ &c\int_{x_i}^{x_1+\partial x_1}dt_1\ldots\int_{x_n}^{x_n+\partial x_n}dt_n\int_0^1 dt\chi\left(t_1,\ldots t_n:\varphi(t_1,\ldots t_n)\ge Mt\right)=\\ &c\int_{x_1}^{x_1+\partial x_1}dt_1\ldots\int_{x_n}^{x_n+\partial x_n}dt_n\,\varphi\left(t_1,\ldots t_n\right)\end{aligned} \tag{3.15}$$

Kde $\chi\left(t_1,\ldots t_n:\varphi(t_1,\ldots t_n)\ge Mt\right)$ je indikátor množiny premenných $t_1,\ldots,t_n$ pre ktoré platí nerovnosť $\varphi(t_1,\ldots t_n)\ge Mt$. Analogicky:

$$c^{-1}=\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\ldots\int_{-\infty}^{\infty}dt_n\int_0^1 dt\chi\left(t_1,\ldots t_n:\varphi(t_1,\ldots t_n)\ge Mt\right)=\int_{-\infty_1}^{\infty}dt_1\ldots\int_{-\infty}^{\infty}dt_n\varphi\left(t_1,\ldots t_n\right) \tag{3.16}$$

Algoritmus:

1. Generujeme *n+1* čísel $\alpha_1,...,\alpha_n$ a α_{n+1}
2. Ak *n*–tica $\alpha_1,...,\alpha_n$, ktoré spĺňa podmienku:
$$\varphi\left(a_1+(b_1-a_1)\alpha_1,...,a_1+(b_n-a_n)\alpha_n\right)\geq M\,\alpha_{n+1}$$
3. konštruujeme $\xi_i=a_i+(b_i-a_i)\alpha_i$ pre $i=1,...,n$
4. Ak nie – procedúru opakujeme.

Veta 2. Ak Ξ je vektorová náhodná premenná s hustotou pravdepodobnosti $c\varphi(x_1,...,x_n)$ v oblasti $D\equiv\left\{\prod_{i=1}^{n}(a_i,b_i)\right\}$ a ξ je pri každom $\Xi=(x_1,...,x_n)$ rozdelená rovnomerne v intervale $[0,\ c\varphi(x_1,...,x_n)\ ]$, potom náhodný vektor (Ξ,ξ) je rovnomerne rozdelený v $(n+1)$–mernej oblasti definovanej nerovnosťami:
$$a_1\leq x_1<b_1,\ \ldots,\ a_n\leq x_n<b_n$$
$$0\leq x_{n+1}<c\varphi(x_1,..,x_n)\cdot$$

Veta 3. Nech náhodná premenná η je funkciou náhodného vektora $(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n)$, $\eta=f(\xi_1,...,\xi_n)$ a $\varphi(x_1,...,x_n)$ je hustota rozdelenia náhodného vektora $(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n)$ potom platí
$$P\{c\leq\eta\leq d\}=\iiint\limits_{c\leq f(x_1,\cdots x_n)\leq d}\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n\ .$$

Veta 4. Nech náhodné vektory $(\xi_1,\ldots,\ \xi_n)$ a $(\eta_1,\ldots,\ \eta_n)$ majú hustoty rozdelení $p_\Xi(x_1,..,x_n)$ resp. $p_H(y_1,\ ..,y_n)$ a $\eta_i=f_i(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ $(i=1,\ldots,n)$ je zobrazenie s nenulovým jakobiánom $\Phi=\dfrac{\partial(f_1,\cdots f_n)}{\partial x_1\cdots\partial x_n}$, potom hustoty rozdelenia $\boldsymbol{p_\Xi}$ a $\boldsymbol{p_H}$ spĺňajú vzťah:
$$p_{\mathrm{H}}(y_1,\cdots,y_n)=p_\Xi\left(f_1(x_1,\ldots,x_n),\cdots,f_n(x_1,\ldots,x_n)\right)|\Phi|\ .$$

Veta 5. Nech ξ_1 a ξ_2 sú nezávislé náhodné premenné s hustotami pravdepodobností $p_1(x)$ resp. $p_2(x)$, potom hustota pravdepodobnosti $p(y)$ sumy ξ_1 a ξ_2 sa rovná konvolúcii:
$$p(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p_1(y-x)\cdot p_2(x)\,dx$$

<u>*Modelovanie rovnomerného rozdelenia na povrchu sféry.*</u>

Základná myšlienka spočíva v ***generovaní bodov rovnomerne rozdelených vnútri gule***. Potom sa nájde priesečník (*P*) priamky vedenej vygenerovaným bodom z centra gule (*O*) a povrchom gule. Takto nájdené priesečníky sú rovnomerne rozdelené po povrchu gule. Jednotkové vektory ležiace na spojnici *OP* vykazujú priestorovú izotropiu.

Algoritmus:

1. Generovať náhodný vektor $\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3)$, kde $\tilde{\alpha}_i = \alpha_i - 0.5$ $(i = 1,2,3)$ sú náhodné veličiny s rovnomerným rozdelením v intervale *(-0.5, 0.5)* (α_i je rovnomerne rozdelené v *(0,1)*).

2. Ak náhodný vektor $\tilde{\alpha}$ spĺňa podmienku:

   $$\tilde{\alpha}_1^2 + \tilde{\alpha}_2^2 + \tilde{\alpha}_3^2 \leq 1/4 \qquad (1),$$

   teda odpovedajúci bod sa nachádza vnútri gule s polomerom ½, potom vytvoriť vektor: $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$, kde $\tau_i = \dfrac{\tilde{\alpha}_i}{\sqrt{\tilde{\alpha}_1^2 + \tilde{\alpha}_2^2 + \tilde{\alpha}_3^2}}$ sú smerové kosinusy jednotkového vektora s izotropným rozdelením.

3. Ak náhodný vektor $\tilde{\alpha}$ nespĺňa podmienku (1) , opakovať body 1 a 2.

Úloha 1:

Modelovať rozpad

$$\eta(\pi^0) \rightarrow \gamma\gamma$$

za predpokladu, že $\eta(\pi^0)$-mezón sa rozpadá v pokoji, hmotnosť $\eta(\pi^0)$-mezónu je *m_η=547.30 MeV (m_π=134.98 MeV),* rozpad mezónu je izotropný. Detektor (viď obr.1) detekuje kvantá γ, ktorých smer výletu zviera s osou z uhol menší ako 45°. Rozpadajúci sa mezón je lokalizovaný v centre detektora (viď obr.1) .

- Energetické rozlíšenie detektora je: $\varepsilon = \dfrac{1\%}{\sqrt{E[GeV]}}$
- Súradnicové rozlíšenie je ideálne.

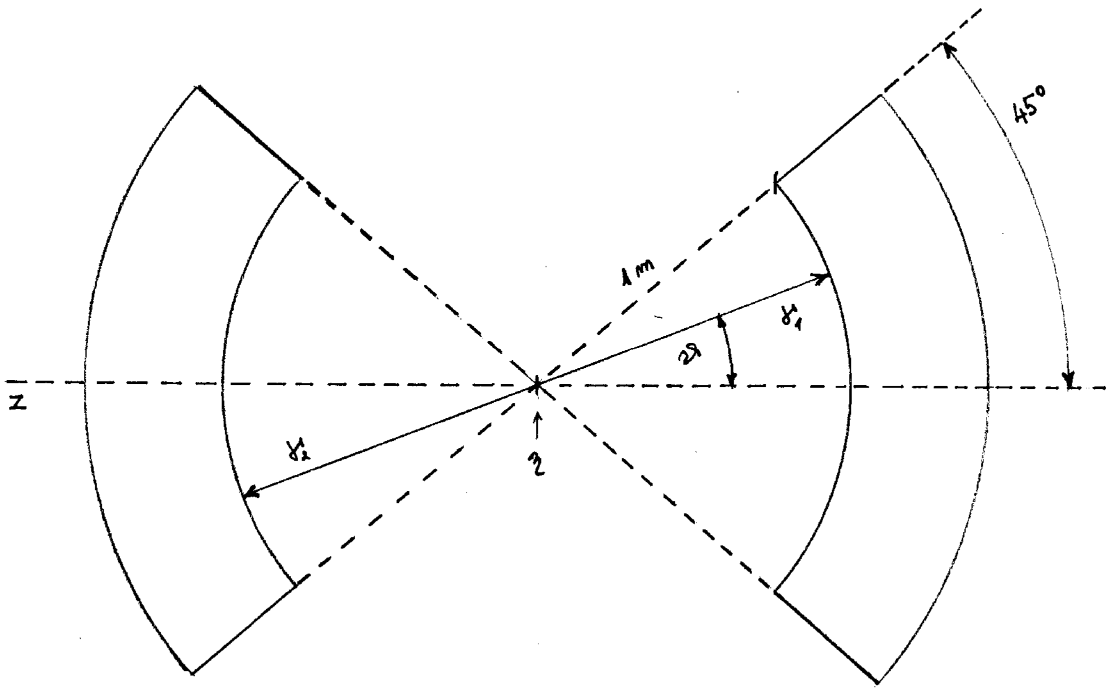
Je treba nájsť ***spektrum invariantných hmotností páru*** $\gamma\gamma$ ($m_{\gamma\gamma}$) pochádzajúcich z rozpadu vyššie uvedeného mezónu.

Invariantná hmotnosť $m_{\gamma\gamma}$ je definovaná ako:

$$m_{\gamma\gamma} = \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - (\vec{P}_1 + \vec{P}_2)^2}$$

kde

$(E_i, \vec{P}_i)$ $i = 1,2$ sú 4-hybnosti γ-kvánt.



Obr. 6: Detektor kvánt gamma, oba segmenty detektora sú kúželovitým výsekom z guľovej vrstvy (stena kúžeľa zviera s osou *z* uhol 45°)