

3.1 Rovnomerné rozdelenie

Základom modelovania je **náhodná premenná α s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti v intervale $(0,1)$** :

$$p_{\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1) \\ 0 & x \notin (0,1) \end{cases} \quad (3.1)$$

Prechod k všeobecnému prípadu, t.j. k náhodnej premennej β s rovnomerným rozdelením v intervale (a,b) :

$$\beta = a + (b - a) \cdot \alpha \quad (3.2)$$

Podstata modelovania rovnomerného rozdelením pravdepodobnosti v intervale $(0,1)$:

Majme veľké celé číslo P a postupnosť $\{x_k, k=0, 1, \dots\}$, ktorú sme dostali na základe rekurentného vzťahu:

$$x_{i+k} = \sum_{j=0}^{k-1} b_j \cdot x_{i+j} + \theta \pmod{P} \quad (3.3)$$

kde b_j a θ sú celé (konštanty), potom pseudonáhodná postupnosť:

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \quad \text{kde } \alpha_i = x_i / P \quad (3.4)$$

má vlastnosti postupnosti realizácií náhodnej premennej rovnomerne rozdelenej v $(0,1)$.

Najjednoduchší prípad:

$$k=1 \text{ a } \theta=0 \quad x_{i+1} = b \cdot x_i \pmod{P}; \quad i = 0, 1, \dots \quad (3.5)$$

Vektorová náhodná premenná s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti v intervale $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_k, b_k)$.

Takúto náhodnú veličinu je možné realizovať na základe $\{\alpha_i\}_{i=1}^k$, kde α_i je rovnomerne rozdelené v $(0,1)$:

$$\vec{\beta} = \left[a_1 + (b_1 - a_1) \cdot \alpha_1 + \dots + a_k + (b_k - a_k) \cdot \alpha_k \right] \quad (3.6)$$

Realizácia na počítači

CERNLIB: *RNDM, RANLUX, RANVEC*

Použitie

$X = \text{RNDM}(V)$

Resp.

Call RANLUX(xn,n) ! dimenzia pole **xn** musí byť $\geq n$.

Call RANVEC(xn,n)

3.2 O modelovaní diskkrétnej náhodnej premennej

Rovnomerné diskkrétne rozdelenie. Majme náhodnú premennú α s rovnomerným rozdelením v $(0,1)$, potom náhodná premenná $\xi = [\alpha(n+1)]$ ($[..]$ je symbol celej časti) má rovnomerné diskkrétne rozdelenie:

$$p_k = P(\xi = k) = \frac{1}{n+1} \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (3.7)$$

Príklad: Ak $n=1$, potom ξ nadobúda hodnoty 0 a 1 s rovnakou pravdepodobnosťou a charakterizuje náhodný experiment „hádzanie mincou“ resp. Bernulliho postupnosť pokusov s parametrom 0.5.

Problém. Majme náhodnú premennú β danú vzťahom:

$$\beta = \frac{\alpha^{(1)}}{2} + \frac{\alpha^{(2)}}{2^2} + \dots + \frac{\alpha^{(k)}}{2^k} + \dots, \quad (3.8)$$

kde $\alpha^{(k)}$ sú náhodné premenné nadobudávajúce hodnoty 0 a 1 s rovnakou pravdepodobnosťou. **Aké bude rozdelenie náhodnej premennej β ? Premodelujte a zdôvodnite!**

Geometrické rozdelenie. Náhodná premenná

$$\xi = \left\lceil \frac{\ln \alpha}{\ln(1-p)} \right\rceil, \quad 0 < p < 1 \quad (3.9)$$

a α je náhodnú premennú s r.r.(0,1), má geometrické rozdelenie pravdepodobnosti:

$$p_k = P(\xi = k) = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.10)$$

Dôkaz:

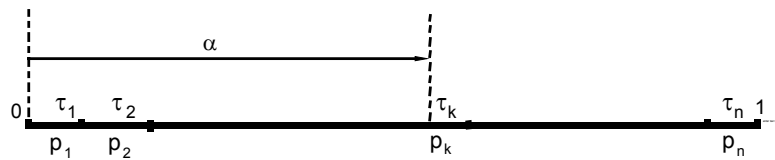
$$\begin{aligned} P(\xi = k) &= P\left\{k \leq \frac{\ln \alpha}{\ln(1-p)} < k+1\right\} = P\{-k \ln(1-p) \leq -\ln \alpha < -(k+1) \ln(1-p)\} = \\ &= P\left\{\frac{1}{(1-p)^k} \leq \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{(1-p)^{k+1}}\right\} = P\{(1-p)^{k+1} \leq \alpha < (1-p)^k\} = (1-p)^k - (1-p)^{k+1} = \\ &= p(1-p)^k \end{aligned}$$

Vo všeobecnosti platí: Majme *diskrétnu náhodnú premennú* ξ nadobúdajúcu hodnoty $\{\tau_i\}$ s pravdepodobnosťami $\{p_i\}$, $i = 1, 2, \dots$, a náhodnú premennú α s rovnomerným rozdelením v $(0, 1)$, potom realizácie náhodnej premennej ξ dostaneme z realizácií α nasledovne:

$\xi = \tau_k$, kde k je dané nerovnosťou:

$$\sum_{j=1}^{k-1} p_j \leq \alpha < \sum_{j=1}^k p_j \quad . \quad (3.11)$$

Geometrická interpretácia:



Obr. 1: Generovanie diskkrétnej náhodnej premennej.

3.3 Všeobecné metódy modelovania

Jednorozmerná náhodná premenná.

Majme náhodnú premennú ξ s distribučnou funkciou $F(x)$ a náhodnú premennú α s rovnomerným rozdelením v $(0, 1)$. Ak ξ' je riešením rovnice:

$$\int_{-\infty}^{\xi'} dF(x) = \alpha \Leftrightarrow \xi' = F^{-1}(\alpha) \quad (3.12)$$

potom ξ' je rozdelená v súlade s distribučnou funkciou $F(x)$, teda $\xi' = \xi$.

Dôkaz:

$$F_{\xi'}(x) = P\{\xi' < x\} = P\left\{\int_{-\infty}^{\xi'} dF(x') < \int_{-\infty}^x dF(x')\right\} = P\{\alpha < F(x)\} = F(x),$$

teda ξ' je rozdelená podľa $F(x)$.

Príklady

1. Doba života miónu τ :

Náhodná premenná τ má distribučnú funkciu $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$. Vychádzajúc z rovnice (3.12) máme:

$$\int_{-\infty}^{\tau} dF(x) = F(\tau) = \alpha \leftarrow \text{rovnomerne rozdelené v } (0, 1)$$

$$1 - \exp(-\lambda \tau) = \alpha \quad \Rightarrow \quad \tau = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \alpha)$$

resp.

$$\tau = -\frac{1}{\lambda} \ln(\alpha)$$

lebo $1 - \alpha$ je náhodná premenná rovnomerne rozdelená v intervale $(0, 1)$.

Vektorová náhodná premenná.

Nech náhodné premenné $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ majú distribučnú funkciu $F(x_1, x_2, \dots, x_k)$ a

$$F_1(x_1) = P(\xi_1 < x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dF(x_1, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_1} dx'_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_k p(x'_1, x_2, \dots, x_k)$$

$$F_2(x_1, x_2) = P(\xi_2 < x_2 \mid x_1) = \frac{\int_{-\infty}^{x_2} dx'_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_k p(x_1, x'_2, \dots, x_k)}{\int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_k p(x_1, x_2, \dots, x_k)} \quad (3.13)$$

$$F_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = P(\xi_k < x_k \mid x_1, \dots, x_{k-1}) = \frac{\int_{-\infty}^{x_k} dx'_k p(x_1, x_2, \dots, x'_k)}{\int_{-\infty}^{\infty} dx_k p(x_1, x_2, \dots, x_k)}$$

potom veličiny $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_k$, ktoré sú riešením postupnosti rovníc:

$$\begin{aligned} F_1(\xi'_1) &= \alpha_1 \\ F_2(\xi'_1, \xi'_2) &= \alpha_2 \\ &\dots \\ F_k(\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_k) &= \alpha_k \end{aligned} \quad (3.14)$$

sú rozdelené v súlade s funkciou $F(x_1, x_2, \dots, x_k)$.

Nech **hustota pravdepodobnosti** náhodnej premennej ξ sa dá vyjadriť **vo forme radu**:

$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, kde $f_k(x) \geq 0$ a náh. premenná α je rovnomerne rozdelená v $(0,1)$.

$$p_k = \int_{-\infty}^{\infty} f_k(x) dx, \quad \Phi_k(x) = \int_{-\infty}^x f_k(t) dt,$$

Označme si:

$$a_0 = 0, \quad a_k = \sum_{i=1}^k p_i, \quad k = 1, 2, \dots$$

(3.15)

potom náh. premenná $\xi' = \Phi_k^{-1}(\alpha - a_{k-1})$ pri $a_{k-1} \leq \alpha \leq a_k$ má hustotu rozdelenia $f(x)$.

Dôkaz. Funkcia $F_k(x) = \Phi_k(x)/p_k$ je distribučnou funkciou. Preto pri podmienke $a_{k-1} \leq \alpha \leq a_k$ náhodná veličina $F_k^{-1}((\alpha - a_{k-1})/p_k)$ má podmienenú hustotu pravdepodobnosti $f_k(x)/p_k$ (je zrejmé, že pri splnení podmienky $a_{k-1} \leq \alpha \leq a_k$ je náhodná veličina $(\alpha - a_{k-1})/p_k$ rozdelená rovnomerne v $(0, 1)$). Avšak evidentne platí:

$$F_k^{-1}\left(\frac{\alpha - a_{k-1}}{p_k}\right) = \Phi_k^{-1}(\alpha - a_{k-1}) = \xi'$$

lebo

$$y = F_k^{-1}\left(\frac{\alpha - a_{k-1}}{p_k}\right) \Rightarrow \frac{\alpha - a_{k-1}}{p_k} = F_k(y) = \frac{\Phi_k(y)}{p_k} \Rightarrow \Phi_k(y) = \alpha - a_{k-1} \Rightarrow y = \Phi_k^{-1}(\alpha - a_{k-1})$$

Teda s pravdepodobnosťou p_k má náhodná veličina ξ' podmienenú hustotu pravdepodobnosti $f_k(x)/p_k$. Odkiaľ vyplýva:

$$f_{\xi'}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \cdot \frac{f_k(x)}{p_k} = f(x) \quad \text{q.e.d.}$$

Príklad. Relayho zákon molekulárneho rozptylu svetla v atmosfére je popísaný hustotou

pravdepodobnosti: $f(x) = \frac{3}{8}(1 + x^2)$, $-1 \leq x \leq +1$ ($x \equiv \cos \theta$). V tomto prípade:

$$f_1(x) = \frac{3}{8}, \quad f_2(x) = \frac{3}{8}x^2 \quad -1 \leq x \leq +1. \quad \text{Odtiaľto dostávame:}$$

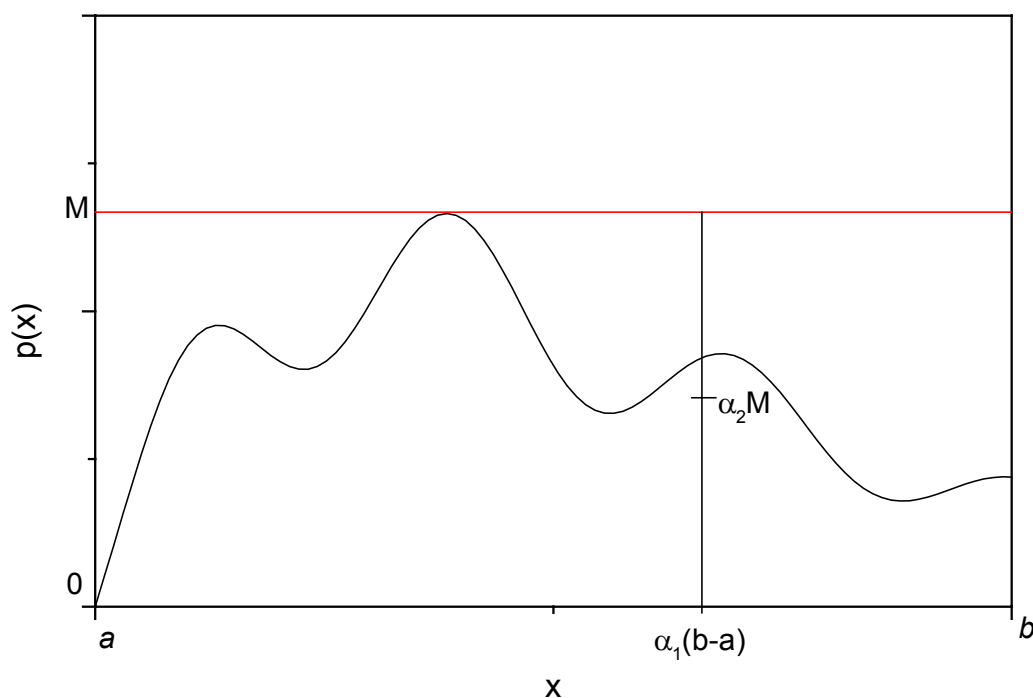
$$p_1 = \frac{3}{4} \quad p_2 = \frac{1}{4} \quad \text{a} \quad \xi = \begin{cases} \frac{8}{3}\alpha_1 - 1 & \alpha_0 \leq \frac{3}{4} \\ (8\alpha_1 - 1)^{1/3} & \alpha_0 > \frac{3}{4} \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\Phi_1(x) = \frac{3}{8}(x+1) \quad \Phi_2(x) = \frac{1}{8}(x^3 + 1)$$

kde α_0 a α_1 sú rovnomerne rozdelené v $(0,1)$.

3.4 Špeciálne metódy modelovania

Majme náhodnú premennú ξ s hustotou pravdepodobnosti $p(x)$ definovaná v $D \equiv (a,b)$ takú, že $p(x)$ je v D ohraničená, t.j. pre každé $x \in D \Rightarrow p(x) \leq M$.



Obr. 2: Generovanie náhodnej premennej so zložitou hustotou pravdepodobnosti .

Generujme α_1 a α_2 , kde α_i je rovnomerne rozdelená na $(0,1)$ a definujme :

$$x = a + (b-a)\alpha_1$$

$$y = \alpha_2 M$$
(3.17)

ak $y \leq p(x) \Rightarrow x$ je realizácia ξ , ak nie pokus opakujeme. Takýmto spôsobom konštruovaná postupnosť veličín x je postupnosťou realizácií ξ .

Realizácia náhodnej veličiny ξ :

1. generujeme náhodný vektor $(a + (b-a)\alpha_1, \alpha_2 M)$;
2. prvú komponentu považujeme za realizáciu ξ , ak druhá komponenta splňa podmienku $\alpha_2 M < p(x)$

Dôkaz:

Náhodný vektor $(\xi, \eta) \equiv (a + (b-a)\alpha_1, \alpha_2 M)$ je rovnomerne rozdelený v $(a, b) \times (0, M)$. Ak prejdeme k náhodnému vektoru $(\xi, \eta) \equiv (\xi, \eta) / \alpha_2 M < p(x)$, potom tento náhodný vektor je rovnomerne rozdelený v oblasti $G \equiv (a, b) \times (0, p(x))$ a jeho distribučná funkcia je

$$f_2(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in G \\ 0 & (x, y) \notin G \end{cases} \quad (3.18)$$

Pre distribučnú funkciu ξ platí:

$$F'(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^x dt \int_{-\infty}^{\infty} du \cdot f_2(t, u) = \int_{-\infty}^x dt \int_{-\infty}^{p(t)} du = \int_a^x p(t) dt = F(x)$$

q.e.d.

Metóda rejekcie (odmietania)

Veta 1. Nech $\varphi(x) = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ je nezáporná funkcia definovaná a integrovateľná v n -mernom kvádri $D \equiv \{a_i \leq x_i \leq b_i\}_{i=1}^n$ a pritom $\varphi(x) \leq M$ pre každé $x \in D$, kde M je konštanta. Ďalej nech $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ je vektorová náhodná premenná s rovnomerným rozdelením v D a α je náhodná premenná s rovnomerným rozdelením v $(0, 1)$, potom hustota zodpovedajúca podmienenej pravdepodobnosti

$$P\{\alpha'_i < x_i, i = 1, \dots, n \mid \alpha M \leq \varphi(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)\} \quad (3.19)$$

je totožná s $c \cdot \varphi(x_1, \dots, x_n)$, kde c je normovacia konštanta.

Dôkaz:

Hustota pravdepodobnosti pre vektorovú náhodnú premennú $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ je $c \cdot \chi(t_1, \dots, t_n)$

kde χ je indikátor oblasti D ($\chi(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} 1 & (t_1, \dots, t_n) \in D \\ 0 & (t_1, \dots, t_n) \notin D \end{cases}$). Pre vyššie zmienenú

podmienenu pravdepodobnosť dostávame:

$$\begin{aligned} P\{x_i \leq \alpha'_i < x_i + \partial x_i; i = 1..n \mid \varphi(\vec{\alpha}') \geq M\alpha\} = \\ c \int_{x_i}^{x_i + \partial x_i} dt_1 \dots \int_{x_n}^{x_n + \partial x_n} dt_n \int_0^1 dt \chi(t_1, \dots, t_n : \varphi(t_1, \dots, t_n) \geq Mt) = \\ c \int_{x_1}^{x_1 + \partial x_1} dt_1 \dots \int_{x_n}^{x_n + \partial x_n} dt_n \varphi(t_1, \dots, t_n) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Kde $\chi(t_1, \dots, t_n : \varphi(t_1, \dots, t_n) \geq Mt)$ je indikátor množiny premenných $t_1, \dots, t_n$ pre ktoré platí nerovnosť $\varphi(t_1, \dots, t_n) \geq Mt$. Analogicky:

$$c^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n \int_0^1 dt \chi(t_1, \dots, t_n : \varphi(t_1, \dots, t_n) \geq Mt) = \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n \varphi(t_1, \dots, t_n) \quad (3.21)$$

Algoritmus:

1. Generujeme $n+1$ čísel $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ a α_{n+1}
2. Ak n -tica $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, ktoré spĺňa podmienku:

$$\varphi(a_1 + (b_1 - a_1)\alpha_1, \dots, a_l + (b_l - a_l)\alpha_l, \dots, a_n + (b_n - a_n)\alpha_n) \geq M \alpha_{n+l}$$

3. konštruujeme $\xi_i = a_i + (b_i - a_i)\alpha_i$ pre $i=1, \dots, n$

4. Ak nie – procedúru opakujeme.

Veta 2. Ak Ξ je vektorová náhodná premenná s hustotou pravdepodobnosti $c\varphi(x_1, \dots, x_n)$ v

oblasti $D = \left\{ \prod_{i=1}^n (a_i, b_i) \right\}$ a ξ je pri každom $\Xi = (x_1, \dots, x_n)$ rozdelená rovnomerne v

intervale $[0, c\varphi(x_1, \dots, x_n)]$, potom náhodný vektor (Ξ, ξ) je rovnomerne rozdelený v $(n+1)$ -mernej oblasti definovanej nerovnosťami:

$$a_1 \leq x_1 < b_1, \dots, a_n \leq x_n < b_n$$

$$0 \leq x_{n+1} < c \cdot \varphi(x_1, \dots, x_n).$$

Veta 3. Nech náhodná premenná η je funkciou náhodného vektora $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $\eta = f(\xi_1, \dots, \xi_n)$ a $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ je hustota rozdelenia náhodného vektora $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ potom

$$P\{c \leq \eta \leq d\} = \iiint_{c \leq f(x_1, \dots, x_n) \leq d} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (3.22)$$

Veta 4. Nech náhodné vektory $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ a $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ majú hustoty rozdelení $p_\Xi(x_1, \dots, x_n)$ resp. $p_H(y_1, \dots, y_n)$ a $\eta_i = f_i(\xi_1, \dots, \xi_n)$ ($i=1, \dots, n$) je zobrazenie s nenulovým jakobiánom

$\Phi = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$, potom hustoty rozdelenia p_Ξ a p_H spĺňajú vzťah:

$$p_H(y_1, \dots, y_n) = p_\Xi(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)) |\Phi|. \quad (3.23)$$

Veta 5. Nech ξ_1 a ξ_2 sú nezávislé náhodné premenné s hustotami pravdepodobností $p_1(x)$ resp. $p_2(x)$, potom hustota pravdepodobnosti $p(y)$ sumy ξ_1 a ξ_2 sa rovná konvolúcii:

$$p(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(y-x) \cdot p_2(x) dx \quad (3.24)$$

Modelovanie rovnomerného rozdelenia na povrchu sféry.

Základná myšlienka spočíva v **generovaní bodov rovnomerne rozdelených vnútri gule**. Potom sa nájde priesečník (P) priamky vedenej vygenerovaným bodom z centra gule (O) a povrchom gule. Takto nájdené priesečníky sú rovnomerne rozdelené po povrchu gule. Jednotkové vektory ležiace na spojnici OP vykazujú priestorovú izotropiu.

Algoritmus:

1. Generovať náhodný vektor $\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3)$, kde $\tilde{\alpha}_i = \alpha_i - 0.5$ ($i = 1, 2, 3$) sú náhodné veličiny s rovnomerným rozdelením v intervale $(-0.5, 0.5)$ (α_i je rovnomerne rozdelené v $(0, 1)$).
2. Ak náhodný vektor $\tilde{\alpha}$ spĺňa podmienku:

$$\tilde{\alpha}_1^2 + \tilde{\alpha}_2^2 + \tilde{\alpha}_3^2 \leq 1/4 \quad (3.25),$$

teda odpovedajúci bod sa nachádza vnútri gule s polomerom $1/2$, potom vytvoriť

vektor: $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$, kde $\tau_i = \frac{\tilde{\alpha}_i}{\sqrt{\tilde{\alpha}_1^2 + \tilde{\alpha}_2^2 + \tilde{\alpha}_3^2}}$ sú smerové kosinusy

jednotkového vektora s izotropným rozdelením.

3. Ak náhodný vektor $\tilde{\alpha}$ nespĺňa podmienku (3.25), opakovať body 1 a 2.

Úloha:

Modelovať rozpad

$$\eta(\pi^0) \rightarrow \gamma\gamma$$

za predpokladu, že $\eta(\pi^0)$ -mezón sa rozpadá v pokoji, hmotnosť $\eta(\pi^0)$ -mezónu je $m_\eta = 547.30 \text{ MeV}$ ($m_\pi = 134.98 \text{ MeV}$), rozpad mezónu je izotropný. Detektor (viď obr.1) detekuje kvantá γ , ktorých smer výletu zvierá s osou z uhol menší ako 45° . Rozpadajúci sa mezón je lokalizovaný v centre detektora (viď obr.1) .

- Energetické rozlíšenie detektora je: $\varepsilon = \frac{1\%}{\sqrt{E[\text{GeV}]}}$
- Súradnicové rozlíšenie je ideálne.

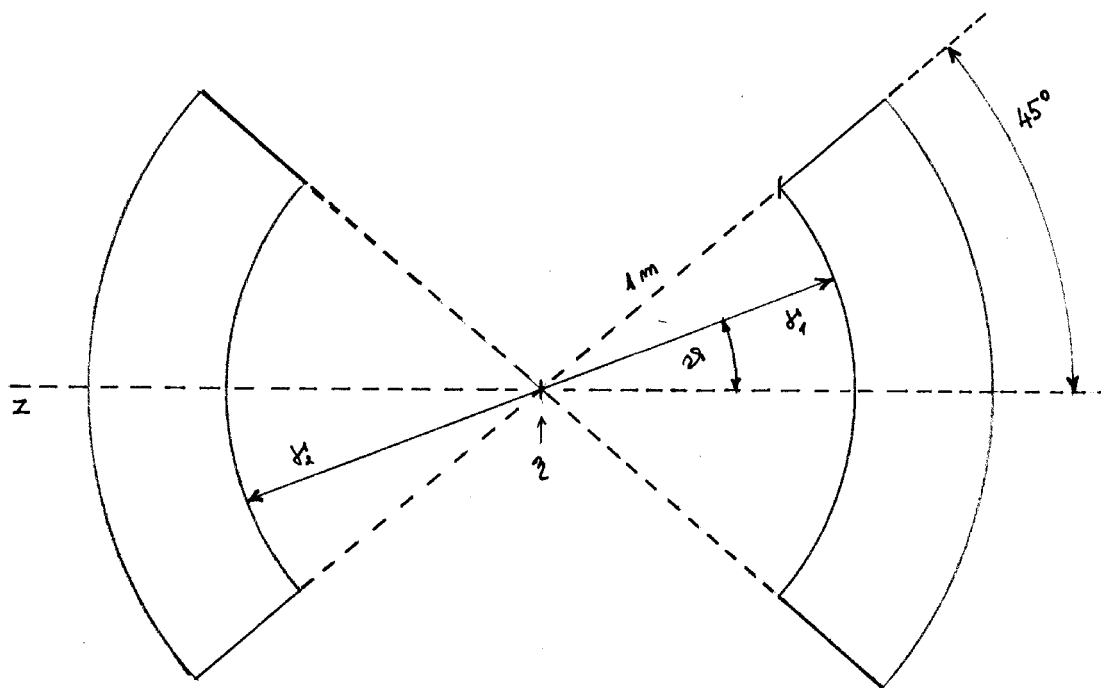
Je treba nájsť **spektrum invariantných hmotností páru $\gamma\gamma$** ($m_{\gamma\gamma}$) pochádzajúcich z rozpadu vyššie uvedeného mezónu.

Invariantná hmotnosť $m_{\gamma\gamma}$ je definovaná ako:

$$m_{\gamma\gamma} = \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - (\vec{P}_1 + \vec{P}_2)^2}$$

kde

$(E_i, \vec{P}_i)$ $i = 1, 2$ sú 4-hybnosti γ -kvánt.



Obr. 3: Detektor kvánt gamma, oba segmenty detektora sú kúžeľovitým výsekom z guľovej vrstvy (stena kúžele zvierá s osou z uhol 45°)