Modelovanie rozdelení I

3.1 Rovnomerné rozdelenie

Základom modelovania je ***náhodná premenná α s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti v intervale (0,1)***:

$$p_{\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1) \\ 0 & x \notin (0,1) \end{cases} \tag{3.1}$$

Prechod k všeobecnému prípadu, t.j. k náhodnej premennej β s rovnomerným rozdelením v intervale (a,b):

$$\beta = a + (b-a)\cdot\alpha \tag{3.2}$$

Podstata modelovania rovnomerného rozdelenia pravdepodobnosti v intervale (0,1): Majme veľké celé číslo P a postupnosť $\{x_k, k=0,1, \ldots, \}$, ktorú sme dostali na základe rekurntného vzťahu:

$$x_{i+k} = \sum_{j=0}^{k-1} b_j \cdot x_{i+j} + \theta \pmod{P} \tag{3.3}$$

kde b_j a θ sú celé (konštanty), potom pseudonáhodná postupnosť:

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \quad \text{kde } \alpha_i = x_i/P \tag{3.4}$$

má vlastnosti postupnosti realizácií náhodnej premennej rovnomerne rozdelenej v (0,1). Najjednoduchší prípad:

$$k=1 \text{ a } \theta=0 \qquad x_{i+1} = b \cdot x_i \pmod{P}; \quad i = 0,1,\cdots \tag{3.5}$$

Vektorová náhodná premenná s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti v intervale $(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times\ldots\times(a_k,b_k)$.

Takúto náhodnú veličinu je možné realizovať na základe $\{\alpha_i\}_{i=1}^{k}$, kde α_i je rovnomerne rozdelené v (0,1) :

$$\vec{\beta} = [a_1 + (b_1 - a_1)\cdot\alpha_1 + \cdots + a_k + (b_k - a_k)\cdot\alpha_k] \tag{3.6}$$

Realizácia na počítači

CERNLIB: ***RNDM, RANLUX, RANVEC***

Použitie : **X = RNDM(V)**

Resp. **Call RANLUX(xn,n)** ! dimenzia pole ***xn*** musí byť $\geq n$.

3.2 Všeobecné metódy modelovania

Jednorozmerná náhodná premenná.

Majme náhodnú premennú ξ s distribučnou funkciou $F(x)$ a náhodnú premennú α s rovnomerným rozdelením v (0, 1). Ak ξ' je riešením rovnice:

$$\int_{-\infty}^{\xi'} dF(x) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \xi' = F^{-1}(\alpha) \tag{3.7}$$

potom ξ' je rozdelená v súlade s distribučnou funkciou $F(x)$, teda $\xi' = \xi$.

Vektorová náhodná premenná.

Nech náhodné premenné $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ majú distribučnú funkciu $\mathbf{F(x_1,x_2,\ldots,x_k)}$ a

$$F_1(x_1) = P(\xi_1 < x_1) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} dF(x_1,\ldots,x_k) = \int_{-\infty}^{x_1} dx_1' \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dx_k\, p(x_1', x_2, \ldots x_k)$$

$$F_2(x_1,x_2) = P(\xi_2 < x_2 \mid x_1) = \frac{\int_{-\infty}^{x_2} dx_2' \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dx_k\, p(x_1, x_2', \ldots x_k)}{\int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dx_k\, p(x_1, x_2, \ldots x_k)} \tag{3.8}$$

$$F_k(x_1,x_2,\ldots x_k) = P(\xi_k < x_k \mid x_1,\ldots x_{k-1}) = \frac{\int_{-\infty}^{x_k} dx_k'\, p(x_1, x_2, \ldots x_k')}{\int_{-\infty}^{\infty} dx_k\, p(x_1, x_2, \ldots x_k)}$$

potom veličiny $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$, ktoré sú riešením postupnosti rovníc:

$$\begin{aligned} &F_1(\xi_1') = \alpha_1 \\ &F_2(\xi_1', \xi_2') = \alpha_2 \\ &\ldots \\ &F_k(\xi_1', \xi_2', \ldots \xi_k') = \alpha_k \end{aligned} \tag{3.9}$$

sú rozdelené v súlade s funkciou $F(x_1,x_2,\ldots,x_k)$.

Príklady

1. Doba života miónu τ:

Náhodná premenná τ má distribučnú funkciu $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$. Vychádzajúc z rovnice (3.7) máme:

$$\int_{-\infty}^{\tau} dF(x) = F(\tau) = \alpha \leftarrow \text{rovnomerne rozdelené v (0, 1)}$$

$$1 - \exp(-\lambda\tau) = \alpha \Rightarrow \tau = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha)$$

resp.

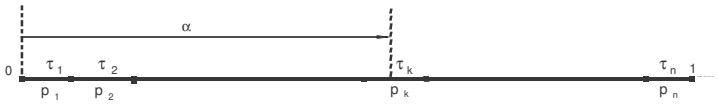
$$\tau = -\frac{1}{\lambda}\ln(\alpha)$$

lebo $1-\alpha$ je náhodná premenná rovnomerne rozdelená v intervale (0,1).

2. Majme ***diskrétnu náhodnú premennú*** ξ nadobúdajúcu hodnoty $\{\tau_i\}$ s pravdepodobnosťami $\{p_i\}$, $i = 1,2 \ldots$, potom pre realizáciu ξ platí: $\xi = \tau_i$, kde k je dané nerovnosťou:

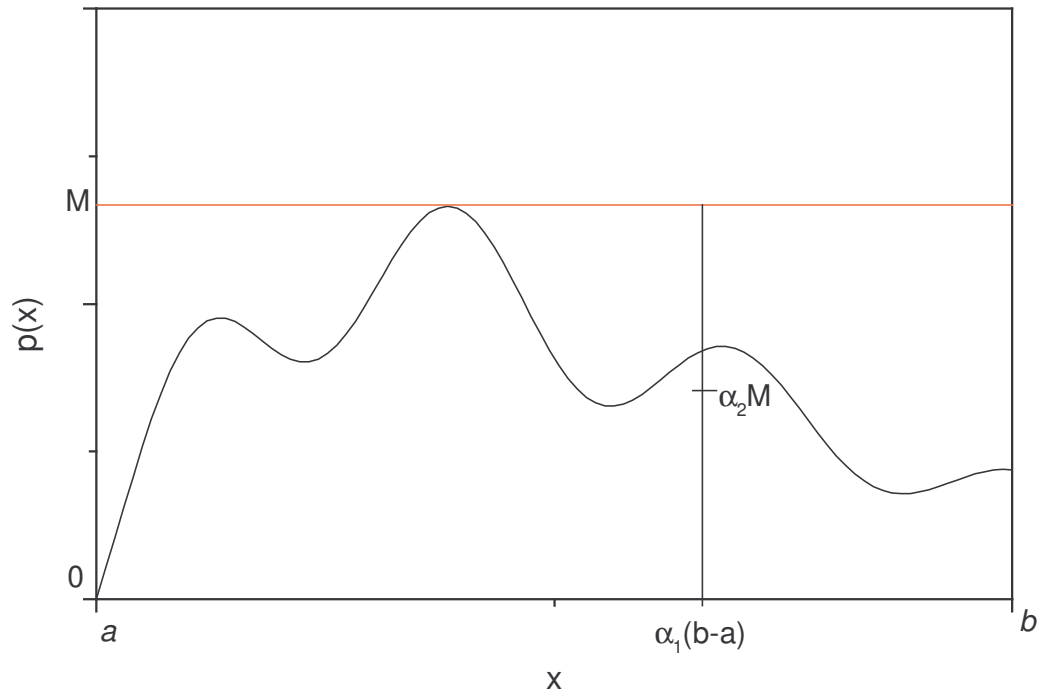
$$\sum_{j=1}^{k-1} p_j \le \alpha < \sum_{j=1}^{k} p_j \quad .$$

Geometrická interpretácia:



Obr. 1: Generovanie diskrétnej náhodnej premennej.

Majme náhodnú premennú ξ s hustotou pravdepodobnosti $p(x)$ definovaná v $D \equiv (a,b)$ takú, že $p(x)$ je v D ohraničená, t.j. pre každé $x \in D \Rightarrow p(x) \leq M$.



Obr. 2: Generovanie náhodnej premennej so zložitou hustotou pravdepodobnosti .

Generujme α_1 a α_2, kde α_i je rovnomerne rozdelená na (0,1) a definujme :

$$x = a + (b-a)\alpha_1$$
$$y = \alpha_2 M \qquad (3.10)$$

ak $y \leq p(x) \Rightarrow x$ je realizácia ξ, ak nie pokus opakujeme. Takýmto spôsobom konštruovaná postupnosť veličín x je postupnosťou realizácií ξ.

Realizácia náhodnej veličiny ξ:

1. generujeme náhodný vektor $(a+(b-a)\alpha_1,\ \alpha_2 M)$;
2. prvú komponentu považujeme za realizáciu ξ, ak druhá komponenta spĺňa podmienku $\alpha_2 M < p(x)$

(3.11)

Dôkaz:

Náhodný vektor $(\xi', \eta') \equiv (a+(b-a)\alpha_1,\ \alpha_2 M)$ je rovnomerne rozdelený v $(a,b)\times(0,M)$. Ak prejdeme k náhodnému vektoru $(\xi, \eta) \equiv (\xi', \eta') / \alpha_2 M < p(x)$, potom tento náhodný vektor je rovnomerne rozdelený v oblasti $G \equiv (a,b) \times (0, p(x))$ a jeho distribučná funkcia je

$$f_2(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in G \\ 0 & (x,y) \notin G \end{cases} \tag{3.12}$$

Pre distribučnú funkciu ξ platí:

$$F'(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} dt \int_{-\infty}^{\infty} du \cdot f_2(t,u) = \int_{a}^{x} dt \int_{0}^{p(t)} du = \int_{a}^{x} p(t)dt = F(x) \tag{3.13}$$

q.e.d.

Metóda rejekcie (odmietania)

Veta 1. Nech $\varphi(x)=\varphi(x_1,...,x_n)$ je nezáporná funkcia definovaná a integrovateľná v *n*–mernom kvádri $D \equiv \{a_i \le x_i \le b_i\}_{i=1}^{n}$ a pritom $\varphi(x) \le M$ pre každé $x \in D$, kde *M* je konštanta . Ďalej nech $(\alpha_1', \ldots, \alpha_n')$ je vektorová náhodná premenná s rovnomerným rozdelením v D a α je náhodná premenná s rovnomerným rozdelením v *(0, 1),* potom hustota zodpovedajúca podmienenej pravdepodobnosti

$$P\{\alpha_i' < x_i, i = 1,\ldots,n \mid \varphi(\alpha_i', \ldots, \alpha_n') \ge \alpha M\} \tag{3.14}$$

je totožná s $c \cdot \varphi(x_1,...,x_n)$, kde c je normovacia konštanta.

Dôkaz:

Hustota pravdepodobnosti pre vektorovú náhodnú premennú $(\alpha'_1,\ldots,\alpha'_n)$ je $c\cdot\chi(t_1,...,t_n)$ kde χ je indikátor oblasti D ($\chi(t_1,\cdots,t_n)=\begin{cases}1 & (t_1,\cdots,t_n)\in D\\ 0 & (t_1,\cdots,t_n)\notin D\end{cases}$). Pre vyššie zmienenú podmienenú pravdepodobnosť dostávame:

$$P\{x_i \le \alpha'_i < x_i+\partial x_i; i=1..n \mid \varphi(\vec{\alpha}') \ge M\alpha\} =$$
$$c\int_{x_i}^{x_1+\partial x_1} dt_1 \ldots \int_{x_n}^{x_n+\partial x_n} dt_n \int_0^1 dt\,\chi(t_1,...t_n : \varphi(t_1,...t_n) \ge Mt) = \tag{3.15}$$
$$c\int_{x_1}^{x_1+\partial x_1} dt_1 \ldots \int_{x_n}^{x_n+\partial x_n} dt_n\,\varphi(t_1,...t_n)$$

Kde $\chi(t_1,...t_n:\varphi(t_1,...t_n)\ge Mt)$ je indikátor množiny premenných $t_1,...,t_n$ pre ktoré platí nerovnosť $\varphi(t_1,...t_n)\ge Mt$. Analogicky:

$$c^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n \int_0^1 dt\,\chi(t_1,...t_n : \varphi(t_1,...t_n) \ge Mt) = \int_{-\infty_1}^{\infty} dt_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n\,\varphi(t_1,...t_n) \tag{3.16}$$

Algoritmus:

1. Generujeme $n+1$ čísel $\alpha_1,...,\alpha_n$ a α_{n+1}
2. Ak n–tica $\alpha_1,...,\alpha_n$, ktoré spĺňa podmienku:
$$\varphi(a_1+(b_1-a_1)\alpha_1,...,a_1+(b_n-a_n)\alpha_n) \ge M\alpha_{n+1}$$
3. konštruujeme $\xi_i = a_i+(b_i-a_i)\alpha_i$ pre $i=1,...,n$
4. Ak nie – procedúru opakujeme.

Veta 2. Ak Ξ je vektorová náhodná premenná s hustotou pravdepodobnosti $c\varphi(x_1,...,x_n)$ v oblasti $D \equiv \left\{\prod_{i=1}^{n}(a_i,b_i)\right\}$ a ξ je pri každom $\Xi=(x_1,...,x_n)$ rozdelená rovnomerne v intervale $[0, c\varphi(x_1,...,x_n)]$, potom náhodný vektor (Ξ,ξ) je rovnomerne rozdelený v $(n+1)$–mernej oblasti definovanej nerovnosťami:

$$a_1 \le x_1 < b_1,...,a_n \le x_n < b_n$$

$$0 \le x_{n+1} < c\varphi(x_1,..,x_n)\cdot$$

Veta 3. Nech náhodná premenná η je funkciou náhodného vektora $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $\eta=f(\xi_1,..., \xi_n)$ a $\varphi(x_1,...,x_n)$ je hustota rozdelenia náhodného vektora $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ potom platí

$$P\{c \le \eta \le d\} = \iiint_{c \le f(x_1,\cdots x_n) \le d} \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \,.$$

Často sa stáva, že pri generovaní nejakého procesu potrebujeme prejsť od jedného náhodného vektora k inému. Napr. pri modelovaní fázového priestoru je často potrebné prejsť od generovania zvolených kinematických premenných k iným kinematickým premenným.

Veta 4. Nech náhodné vektory $(\xi_1,\ldots, \xi_n)$ a $(\eta_1,\ldots, \eta_n)$ majú hustoty rozdelení $p_\Xi(x_1,..,x_n)$ resp. $p_H(y_1, ..,y_n)$ a $\eta_i = f_i(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ $(i=1,\ldots,n)$ je zobrazenie s nenulovým jakobiánom $\Phi = \dfrac{\partial(f_1,\cdots f_n)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}$, potom hustoty rozdelenia p_Ξ a p_H spĺňajú vzťah:

$$p_H(y_1,\cdots,y_n) = p_\Xi\left(f_1(x_1,\ldots,x_n),\cdots,f_n(x_1,\ldots,x_n)\right)\left|\Phi\right| \,.$$

Veta 5. Nech ξ_1 a ξ_2 sú nezávislé náhodné premenné s hustotami pravdepodobností $p_1(x)$ resp. $p_2(x)$, potom hustota pravdepodobnosti $p(y)$ sumy ξ_1 a ξ_2 sa rovná konvolúcii:

$$p(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(y-x) \cdot p_2(x) dx$$

Modelovanie rovnomerného rozdelenia na povrchu sféry.

Základná myšlienka spočíva v ***generovaní bodov rovnomerne rozdelených vnútri gule***. Potom sa nájde priesečník (*P*) priamky vedenej vygenerovaným bodom z centra gule (*O*) a povrchom gule. Takto nájdené priesečníky sú rovnomerne rozdelené po povrchu gule. Jednotkové vektory ležiace na spojnici *OP* vykazujú priestorovú izotropiu.

Algoritmus:

Generovať náhodný vektor $\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3)$, kde $\tilde{\alpha}_i = \alpha_i - 0.5$ $(i = 1,2,3)$ sú náhodné veličiny s rovnomerným rozdelením v intervale *(-0.5, 0.5)* (α_i je rovnomerne rozdelené v *(0,1)*).

1. Ak náhodný vektor $\tilde{\alpha}$ spĺňa podmienku:

   $$\tilde{\alpha}_1^2 + \tilde{\alpha}_2^2 + \tilde{\alpha}_3^2 \le 1/4 \qquad (1),$$

   teda odpovedajúci bod sa nachádza vnútri gule s polomerom ½, potom vytvoriť vektor: $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$, kde $\tau_i = \dfrac{\tilde{\alpha}_i}{\sqrt{\tilde{\alpha}_1^2 + \tilde{\alpha}_2^2 + \tilde{\alpha}_3^2}}$ sú smerové kosinusy jednotkového vektora s izotropným rozdelením.

2. Ak náhodný vektor $\tilde{\alpha}$ nespĺňa podmienku (1) , opakovať body 1 a 2.

Úloha 1: **Modelovať rozpad** $\eta(\pi^0) \rightarrow \gamma\gamma$

za predpokladu, že $\eta(\pi^0)$-mezón sa rozpadá v pokoji, hmotnosť $\eta(\pi^0)$-mezónu je m_η=*547.30 MeV* (m_π=*134.98 MeV*), rozpad mezónu je izotropný. Detektor (viď obr.1) detekuje kvantá γ, ktorých smer výletu zviera s osou z uhol menší ako 45°. Rozpadajúci sa mezón je lokalizovaný v centre detektora (viď obr.1) .

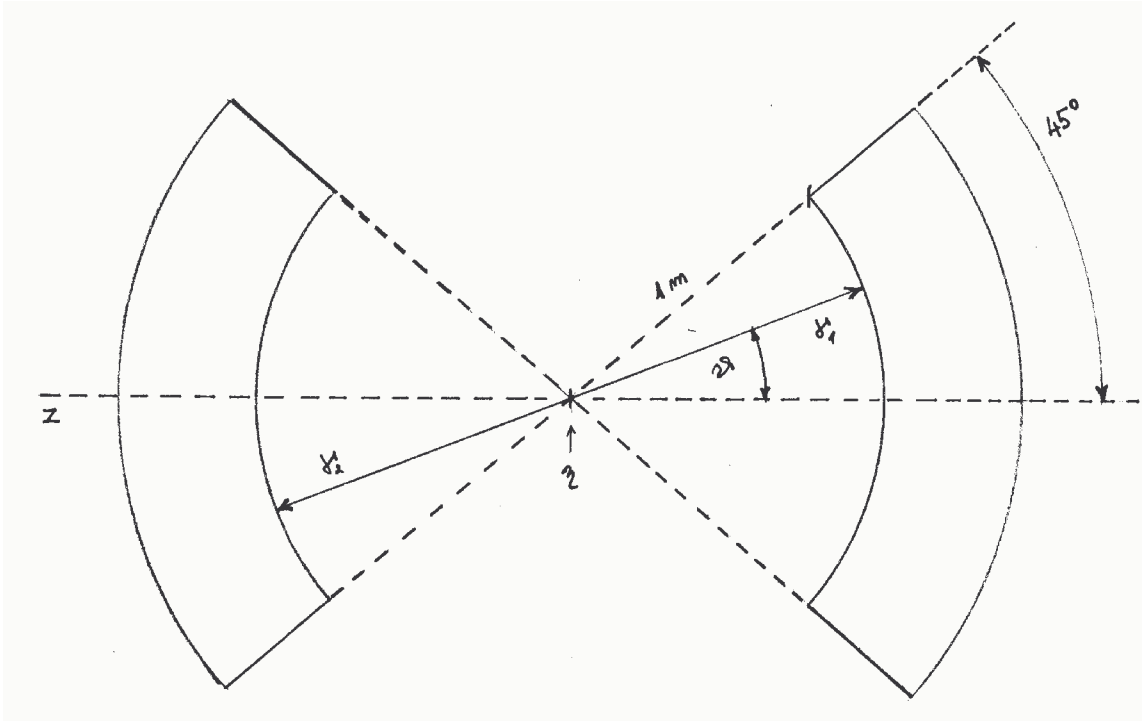
- **Energetické rozlíšenie detektora je**: $\varepsilon = \dfrac{1\%}{\sqrt{E[GeV]}}$

- **Súradnicové rozlíšenie je ideálne.**

Je treba nájsť ***spektrum invariantných hmotností páru*** $\gamma\gamma$ ($m_{\gamma\gamma}$) pochádzajúcich z rozpadu vyššie uvedeného mezónu. Invariantná hmotnosť $m_{\gamma\gamma}$ je definovaná ako:

$$m_{\gamma\gamma} = \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - (\vec{P}_1 + \vec{P}_2)^2}$$

kde $(E_i, \vec{P}_i)$ $i = 1,2$ sú 4-hybnosti γ-kvánt.



Obr. 3: Detektor kvánt gamma, oba segmenty detektora sú kúžeľovitým výsekom z guľovej vrstvy (stena kúžeľa zviera s osou *z* uhol 45°)