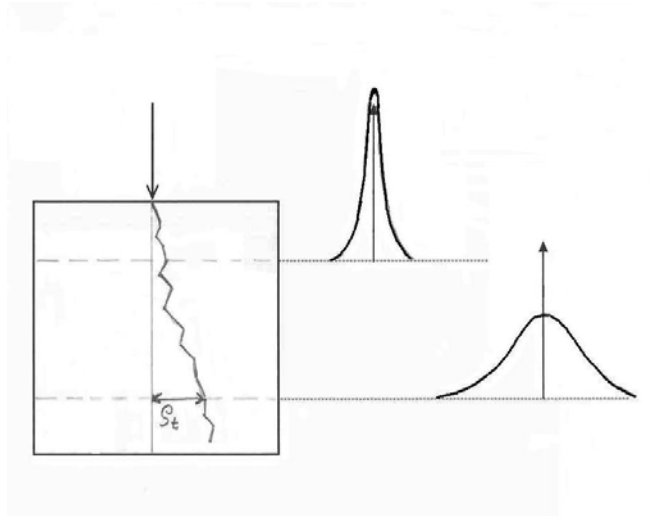


Stochastické procesy.

Problém : Rozptyľujúci sa mión v látkovom prostredí. Vzdialenosť ρ_t rozptyleného miónu od osi danej incidentným bodom a smerom vzletu na hĺbke t je náhodnou veličinou, ktorej hustota pravdepodobnosti závisí od hĺbky: $\{ \rho_t, t \in T \equiv \text{množina možných hĺbok} \}$.



Obr. 1 : Mión rozptyľujúci sa v látkovom prostredí.

Nech T je nejaká množina indexov (napr. množina reálnych čísel). **Stochastický proces s množinou T hodnôt parametra t** je taký systém náhodných premenných $\{ X_t, t \in T \}$, že každý konečný podsystem $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ ($t_i = 1, \dots, n$) je množina náhodných premenných s určitou distribučnou funkciou $F_{t_1, \dots, t_n}(x_{t_1}, \dots, x_{t_n})$,

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) = P(X_{t_1} < x_{t_1}, \dots, X_{t_n} < x_{t_n}).$$

Distribučné funkcie stochastického procesu spĺňajú:

1. **podmienku symetrie**: pre ľubovoľnú permutáciu $i_1, \dots, i_n$ čísel $1, \dots, n$ platí

$$F_{t_{i_1}, \dots, t_{i_n}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = F_{t_1, \dots, t_n}(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}).$$

2. **podmienku konzistencie**: ak je $m < n$, tak pre ľubovoľné $t_{m+1}, \dots, t_n \in T$ platí

$$F_{t_1, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n}(x_{t_1}, \dots, x_{t_m}, \infty, \dots, \infty) = F_{t_1, \dots, t_m}(x_{t_1}, \dots, x_{t_m}).$$

V aplikáciách X_t je pozorovaná veličina pri hodnote parametra t a T je množina, v ktorej sa parameter mení –dva dôležité prípady T :

- T je nekonečná postupnosť, potom $\{X_t, t \in T\}$ je **stochastickým procesom s diskrétnym parametrom** alebo stochastickou postupnosťou;
- T je interval potom $\{X_t, t \in T\}$ je **stochastickým procesom so spojitým parametrom**.

Parameter t sa zvykne nazývať čas.

Markovove reťaze

Markovova reťaz je špeciálnym prípadom Markovovho procesu. Je to najjednoduchšie zovšeobecnenie pojmu nezávislých pokusov, keď predpokladáme, že výsledok pokusu závisí len od výsledku bezprostredne predchádzajúceho pokusu. Predpokladajme, že výsledkom každého pokusu môže byť jedna a len jedna udalosť zo spočítateľnej množiny navzájom vylučujúcich sa udalostí $E_1, E_2, \dots$. Definujme náhodné premenné X_n ($n=0, 1, \dots$) takto $X_n=j$ ak výsledkom n -tého pokusu je udalosť E_j

Definícia 2. Hovoríme, že postupnosť pokusov alebo príslušná postupnosť náhodných premenných $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ tvorí **Markovovu reťaz**, ak pre všetky n ($n=1, 2, \dots, \infty$) a pre všetky možné hodnoty náhodných premenných $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ platí

$$P(X_n = j / X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) = P(X_n = j_n / X_{n-1} = i_{n-1})$$

Používajúc fyzikálnu terminológiu, možno hovoriť o pohybe systému a udalosti E_j nazvať stavmi tohto systému. Rozdelenie pravdepodobnosti $P(X_0=j) = P_j(0)$, $j=1, 2, \dots$ náhodnej premennej X_0 sa nazýva počiatočným rozdelením a podmienené pravdepodobnosti $P(X_n=j/X_{n-1}=i)$ nazývajú sa prechodovými pravdepodobnosťami.

Homogénnou Markovovou reťazou nazývame takú Markovovu reťaz, ktorej pravdepodobnosti prechodu $P(X_n=j/X_{n-1}=i)$ nezávisia od n , t.j. platí

$$P(X_n=j/X_{n-1}=i) = p_{ij} .$$

Pre pravdepodobnosť prechodu platí

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = 1, \quad (i = 1, 2, \dots) \quad \text{a} \quad p_{ij} \geq 0 .$$

Z pravdepodobnosti prechodu je možné utvoriť maticu:

$$P_1 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{pmatrix}$$

Takáto matica sa nazýva maticou pravdepodobnosti prechodu.

Definícia. Stochastický proces $\{X_t, t \in T\}$ nazývame **Markovovým procesom**, ak pre $n=1, 2, \dots$ a ľubovoľné $t_m \in T$ ($m=0, 1, \dots, n$), $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, a pre všetky reálne x a y platí

$$P(X_{t_n} < y / X_{t_{n-1}} = x, X_{t_{n-2}} = x_{n-2}, \dots, X_{t_0} = x_0) = P(X_{t_n} < y / X_{t_{n-1}} = x)$$

pre všetky reálne hodnoty $x_{n-2}, \dots, x_0$.

Definícia. Markovov proces sa nazýva **homogénnym** ak pre ľubovoľné $t_1 \in T$ a $t_2 \in T$, kde $t_1 < t_2$, distribučná funkcia

$$F(t_1, x, t_2, y) = P(X_{t_2} < y | X_{t_1} = x)$$

závisí len od rozdielu $t=t_2 - t_1$ teda

$$F(t_1, x, t_2, y) = F(t, x, y) .$$

Definícia. Proces $\{X_t, t \in T\}$ nazývame procesom s nezávislými prírastkami ak pre $n=2,3,\dots$ a ľubovoľné $t_m \in T, t_0 < t_1 < \dots < t_n$, sú náhodné premenné

$X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ nezávislé.

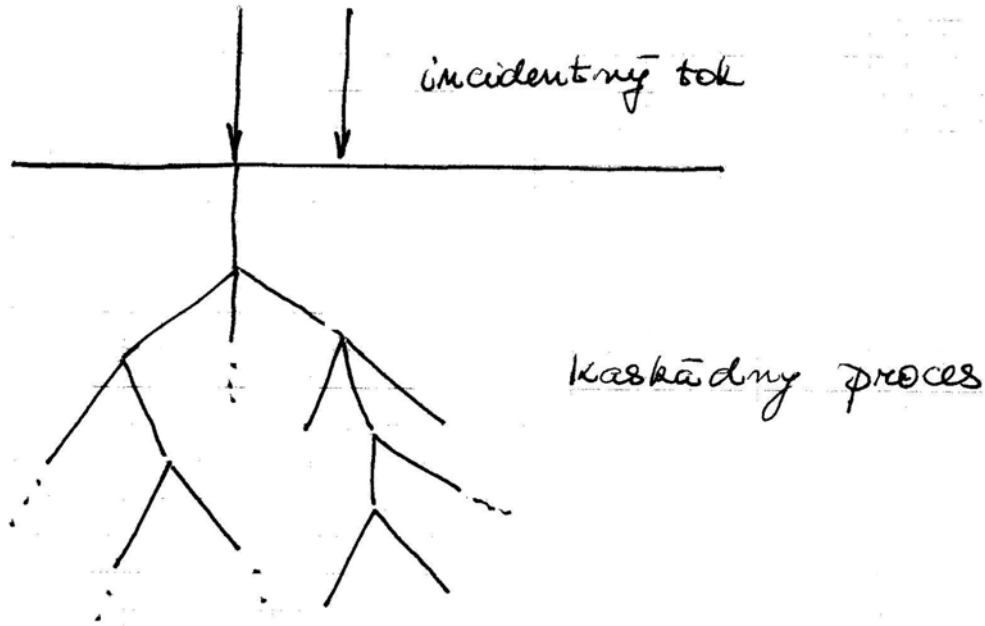
Definícia. Proces $\{X_t, t \in T\}$ nazývame *procesom s homogénnymi prírastkami* ak pre ľubovoľné $t_1 \in T$ a $t_2 \in T$, kde $t_1 < t_2$, distribučná funkcia rozdielu $X_{t_2} - X_{t_1}$ závisí len od rozdielu $t=t_2 - t_1$.

Definícia. Diskrétny proces $\{X_t, t \in T\}$ nazývame *Markovovým procesom*, ak pre $n=1,2,\dots$ a ľubovoľné $t_m \in T$ ($m=0,1,\dots,n$), $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, a pre ľubovoľné celé čísla i a j platí

$$P(X_{t_n} = j / X_{t_{n-1}} = i, X_{t_{n-2}} = i_{n-2}, \dots, X_{t_0} = i_0) = P(X_{t_n} = j / X_{t_{n-1}} = i)$$
 pre ľubovoľné celé čísla $i_{n-2}, \dots, i_0$.

Definícia. Diskrétny Markovov proces sa nazýva *homogénnym* ak pre ľubovoľné i, j a pre ľubovoľné $t_1 \in T$ a $t_2 \in T$, kde $t_1 < t_2$, závisí funkcia pre pravdepodobnosť prechodu len od rozdielu $t_2 - t_1$.

Transportná rovnica



Častice kaskády budeme popisovať :

hustotou $f_i(\vec{r}, \vec{p}, t) \equiv$ hustota častíc typu i v jednotke fázového priestoru okolo bodu $(\vec{r}, \vec{p})$ v čase t .

šírenie hadrónovej kaskády je popísané transportnou rovnicou – jej diferenciálny tvar je:

$$\frac{\partial f_i(\vec{r}, \vec{p}, t)}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial f_i(\vec{r}, \vec{p}, t)}{\partial \vec{r}} + \vec{F} \frac{\partial f_i(\vec{r}, \vec{p}, t)}{\partial \vec{p}} = I_{coll} \quad (1)$$

Kde zrážkový integrál I_{coll} :

$$I_{coll} = \underbrace{-n_0 \sigma(p) \cdot v \cdot f_i(\vec{r}, \vec{p}, t)}_{(a)} + \underbrace{n_i \sum_k \int d^3 \vec{p}' \frac{d\sigma(\vec{p}', k \rightarrow \vec{p}, i)}{d\vec{p}'} \cdot v' \cdot f_i(\vec{r}, \vec{p}, t)}_{(b)} + Q_i(\vec{r}, \vec{p}, t) \quad (2)$$

(a) $\equiv$ zmenšenie počtu častíc v jednotke fázového objemu v dôsledku ich interakcií

(b) $\equiv$ zväčšenie počtu častíc v jednotke fázového objemu v dôsledku interakcií častíc aj iných s inými hybnosťami.

$n_0 \equiv$ koncentrácia atómov prostredia,

$\sigma \left(\frac{d\sigma}{d\vec{p}} \right) \equiv$ účinný (diferenciálny) prierez interakcie,

$Q_V(\vec{r}, \vec{p}, t) \equiv$ externý zdroj častíc s hybnosťou $\vec{p}$.

Tok častíc (typu i s hybnosťou $\vec{p}$ v bode $\vec{r}$):

$$J_i(\vec{r}, \vec{p}, t) = \vec{v} \cdot f_i(\vec{r}, \vec{p}, t) \quad \vec{v} = \left| \frac{\vec{p}}{m} \right| \quad (3)$$

Vektor toku častíc (typu i s hybnosťou $\vec{p}$ v bode $\vec{r}$):

$$\vec{J}_i(\vec{r}, \vec{p}, t) = \vec{v} \cdot f_i(\vec{r}, \vec{p}, t) = \vec{\omega} \cdot J_i(\vec{r}, \vec{p}, t) \quad (4)$$

kde $\vec{\omega}$ je jednotkový vektor v smere pohybu častice.

Hustota zrážok:

$$\Psi_i(\vec{r}, \vec{p}, t) = n_0 \cdot \sigma(p) \cdot J_i(\vec{r}, \vec{p}, t) \quad (5)$$

Stacionárny proces ($\partial f / \partial t = 0$) **bez vonkajších síl** ($\vec{F} = 0$).

Pre transportnú rovnicu v tomto prípade dostávame:

$$\vec{\omega} \cdot \frac{\partial J_i(\vec{r}, \vec{\omega}, p)}{\partial \vec{r}} + n_0 \cdot \sigma(p) \cdot J_i(\vec{r}, \vec{\omega}, p) = I_{coll} + Q_V(\vec{r}, \vec{\omega}, p) \quad (6)$$

Majme jednotkový zdroj častíc typu i v bode $(\vec{r}_0, \vec{\omega}_0, p_0)$, t.j.

$$I_{coll} + Q_V = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \delta(\vec{\omega} - \vec{\omega}_0) \cdot \delta(p - p_0) \quad (7)$$

Riešením transportnej rovnice pre bodový zdroj je Greenova funkcia:

$$\vec{\omega} \cdot \frac{\partial G_i(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{\omega} - \vec{\omega}_0, p - p_0)}{\partial \vec{r}} + n_0 \cdot \sigma(p) \cdot G_i(\dots) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \delta(\vec{\omega} - \vec{\omega}_0) \cdot \delta(p - p_0) \quad (8)$$

Riešením transportnej rovnice pre ľubovoľný zdroj je (transportná rovnica v integrálnom tvare):

$$J(\vec{r}, \vec{\omega}, p) = \int d\vec{r}_0 d\vec{\omega}_0 dp_0 G(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{\omega} - \vec{\omega}_0, p - p_0) [I_{coll}(\vec{r}_0, \vec{\omega}_0, p_0) + Q_V(\vec{r}_0, \vec{\omega}_0, p_0)] \quad (9)$$

Zavedme $x \equiv (\vec{r}, \vec{\omega}, p)$ a predpokladajme, že procesu sa zúčastňujú častice rôznych typov, potom metóda Greenovych funkcií vedie k:

$$J_i(x) = \sum_j \int dx' K_{ij}(x, x') J_j(x') + J_{oi}(x) \quad (10)$$

Kde

$$K_{ij}(x, x') = G_i(x, x') \cdot F_{ij}(p, p', \vec{\omega} \cdot \vec{\omega})$$

$F_{ij}(p, p', \vec{\omega} \cdot \vec{\omega})$ je počet častíc typu i s hybnosťou p a smerom $\vec{\omega}$ vznikajúcich pri interakcii častice typu j s hybnosťou p' a smerom $\vec{\omega}'$.

$J_{oi}(x)$ je primárny zdroj častíc.

Riešenie Integrálnej transportnej rovnice v tvare Von Neumanovho radu.

$$J_i = \sum_{n=0}^{\infty} (K_{ij})^n J_{oi} \quad , \quad (K_{ij})^0 = I \quad (11)$$

kde K je integrálny operátor:

$$(K_{ij} f)(y) = \int dx K_{ij}(y, x) f(x)$$

Transportná rovnica pre hustotu zrážok

Použijúc vzťah pre hustotu zrážok transportnú rovnicu (10) môžeme prepísať:

$$\Psi(x) = \int dx' K(x', x) \Psi(x') + Q(x) \quad (12)$$

kde

$Q(x)$ je hustota primárneho zdroja ($\sigma(p)n_0 J_0$),

Ψ je vektor: $(\Psi(x))_i = \Psi_i(x)$ a K je matica: $(K(y,x))_{ij} = K_{ij}(y,x)$.

Podstata MC-výpočtu. Zvyčajne nás zaujíma funkcionál nasledovného typu:

$$I = (h, \Psi) = \int_{(x)} d\chi \quad h(i, \vec{r}, \vec{p}) \Psi(i, \vec{r}, \vec{p}) \quad (13)$$

Podstata výpočtu funkcionálu I metódou MC je v tom, že sa realizuje odhad určitej náhodnej premennej ξ (estimátora), ktorá je definovaná na priestore Ω všetkých možných realizácií nejakého Markovovho procesu, ktorý tu reprezentuje reálny fyzikálny proces:

$$(h, \Psi) = E(\xi) = \int_{\Omega} \xi(\alpha) dP(\alpha) \quad (14)$$

kde

α je realizácia Markovovho procesu

P je pravdepodobnostná miera na priestore Ω , teda pravdepodobnosť realizácie daného α .

Príklad jednoduchého Markovovho procesu. Uvažujme prípad transportu častice, ktorá môže byť pri interakcii rozptýlená resp. pohltená.

Markovov proces je daný:

- Počiatočným rozdelením pravdepodobnosti $p_0(x)$ (≥ 0)
- Hustotou pravdepodobnosti prechodu $p(x, y) \geq 0$

Podmienky:

$$\int_{\Omega} dx \quad p_0(x) = 1 \quad \text{a} \quad \int_{\Omega} dy \quad p(x, y) = 1 - g(x) \quad (15)$$

kde Ω je fázový priestor

$g(x)$ je pravdepodobnosť pohltienia častice

Realizácia Markovovho procesu. Je to postupnosť bodov fázového priestoru

$(x_0, x_1, \dots, x_n)$, ktoré sú generované nasledovne:

- x_0 je generované z rozdelenia $p_0(x)$ (súradnica vo fázovom priestore častice vstupujúcej do prvej interakcie.
- S pravdepodobnosťou $g(x)$ je častica pohltená.
- x_1 - ak nedošlo k pohltieniu častice v x_0 , generujeme x_1 z rozdelenia $\frac{p(x_0, x_1)}{1 - g(x_0)}$,

atď.

Úloha 3:

Majme časticu rozptyľujúcu sa v prostredí v rovine xy . Počiatočná poloha častice je:

$x_0 = 0$, $y_0 = 0$ a smer $\theta_0 = 0$ (θ je uhol udávajúci odklon od osi x).

V každom kroku častica urazí vzdialenosť l , ktorá je náhodnou premennou s distribučnou funkciou $F(l) = 1 - \exp(-l/\lambda)$.

Po urazení dráhy l sa častica rozptýli v súlade s hustotou pravdepodobnosti

$$p(\theta) = \frac{a}{\sin^4(\theta/2)}.$$

Ako bude rozdelená častica v rovine xy a aké bude spektrum jej uhlov po n krokoch ($n=5, 10, \dots$)?