3. Modelovanie rozdelení ver: 23. 10. 2002

3.1 Rovnomerné rozdelenie

Základom modelovania je ***náhodná premenná α s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti v intervale (0,1)***:

$$p_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1) \\ 0 & x \notin (0,1) \end{cases} \tag{3.1}$$

Prechod k všeobecnému prípadu, t.j. k náhodnej premennej β s rovnomerným rozdelením v intervale (***a,b***):

$$\boldsymbol{\beta = a + (b - a) \cdot \alpha} \tag{3.2}$$

***Podstata modelovania rovnomerného rozdelením pravdepodobnosti v intervale (0,1)*:**
Majme veľké celé číslo ***P*** a postupnosť {$\boldsymbol{x_k}$ **,** *k=0,1, ...,* }, ktorú sme dostali na základe rekurntného vzťahu:

$$\boldsymbol{x_{i+k} = \sum_{j=0}^{k-1} b_j \cdot x_{i+j} + \theta \quad (\mathrm{mod}\, P)} \tag{3.3}$$

kde $\boldsymbol{b_j}$ a $\boldsymbol{\theta}$ sú celé (konštanty), potom pseudonáhodná postupnosť:

$$\boldsymbol{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2,} \ \cdots, \qquad \text{kde } \alpha_i = x_i / P \tag{3.4}$$

má vlastnosti postupnosti realizácií náhodnej premennej rovnomerne rozdelenej v (0,1).

Najjednoduchší prípad:

$$\boldsymbol{k=1} \text{ a } \boldsymbol{\theta=0} \qquad \boldsymbol{x_{i+1} = b \cdot x_i \quad (\mathrm{mod}\, P);} \quad \boldsymbol{i = 0,1,\cdots} \tag{3.5}$$

Vektorová náhodná premenná s rovnomerným rozdelením pravdepodobnosti v intervale $(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times\ldots\times(a_k,b_k)$.

Takúto náhodnú veličinu je možné realizovať na základe $\{\alpha_i\}_{i=1}^{k}$, kde α_I je rovnomerne rozdelené v (0,1) :

$$\vec{\beta} = \left[a_1 + (b_1 - a_1)\cdot\alpha_1 + \cdots + a_k + (b_k - a_k)\cdot\alpha_k \right] \qquad (3.6)$$

Realizácia na počítači

CERNLIB: ***RNDM, RANLUX, RANVEC***

Použitie

X = RNDM(V)

Resp.

Call RANLUX(xn,n) ! dimenzia pole ***xn*** musí byť $\geq$ ***n.***

Call RANVEC(xn,n)

3.2 O modelovaní diskrétnej náhodnej premennej

Rovnomerné diskrétne rozdelenie. Majme náhodnú premennú α s rovnomerným rozdelením v *(0,1)*, potom náhodná premenná $\xi = [\alpha(n+1)]$ ([..] je symbol celej časti) má rovnomerné diskrétne rozdelenie:

$$p_k = P(\xi = k) = \frac{1}{n+1} \qquad k = 0, 1, \cdots, n \tag{3.7}$$

Príklad: Ak ***n=1***, potom ξ nadobúda hodnoty 0 a 1 s rovnakou pravdepodobnosťou a charakterizuje náhodný experiment „hádzanie mincou" resp. Bernulliho postupnosť pokusov s parametrom *0.5*.

Problém. Majme náhodnú premennú β danú vzťahom:

$$\beta = \frac{\alpha^{(1)}}{2} + \frac{\alpha^{(2)}}{2^2} + \cdots + \frac{\alpha^{(k)}}{2^k} + \cdots, \tag{3.8}$$

kde $\alpha^{(k)}$ sú náhodné premenné nadobudajúce hodnoty 0 a 1 s rovnakou pravdepodobnosľou. **Aké bude rozdelenie náhodnj premennej β? Premodelujte a zdôvodnite!**

Geometrické rozdelenie. Náhodná premenná

$$\xi = \left[\frac{\ln \alpha}{\ln(1-p)}\right], \qquad 0 < p < 1 \tag{3.9}$$

a α je náhodnú premennú s r.r.(0,1), má geometrické rozdelenie pravdepodobnosti:

$$p_k = P(\xi = k) = p(1-p)^k, \; k = 0, \; 1, \; \cdots \tag{3.10}$$

Dôkaz:

$$P(\xi = k) = P\left\{k \le \frac{\ln \alpha}{\ln(1-p)} < k+1\right\} = P\{-k\ln(1-p) \le -\ln\alpha < -(k+1)\ln(1-p)\} =$$

$$= P\left\{\frac{1}{(1-p)^k} \le \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{(1-p)^{k+1}}\right\} = P\{(1-p)^{k+1} \le \alpha < (1-p)^k\} = (1-p)^k - (1-p)^{k+1} =$$

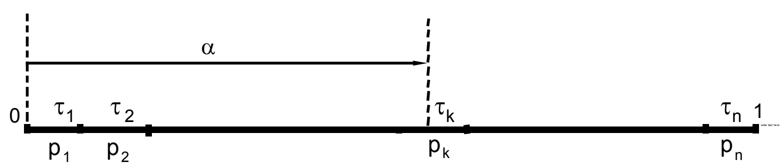
$$= p(1-p)^k$$

Vo všeobecnosti platí: Majme ***diskrétnu náhodnú premennú*** ξ nadobúdajúcu hodnoty $\{\tau_i\}$ s pravdepodobnosťami $\{p_i\}$, $i = 1,2 \ldots,$ a náhodnú premennú α s rovnomerným rozdelením v $(0,1)$, potom realizácie náhodnej premennej ξ dostaneme z realizácií α nasledovne:

$\xi = \tau_k$, kde k je dané nerovnosťou:

$$\sum_{j=1}^{k-1} p_j \le \alpha < \sum_{j=1}^{k} p_j \quad . \tag{3.11}$$

Geometrická interpretácia:



Obr. 1: Generovanie diskrétnej náhodnej premennej.

3.3 Všeobecné metódy modelovania

Jednorozmerná náhodná premenná.

Majme náhodnú premennú ξ s distribučnou funkciou ***F(x)*** a náhodnú premennú α s rovnomerným rozdelením v (0, 1). Ak ξ' je riešením rovnice:

$$\int_{-\infty}^{\xi'} dF(x) = \alpha \Leftrightarrow \xi' = F^{-1}(\alpha) \qquad (3.12)$$

potom ξ' je rozdelená v súlade s distribučnou funkciou ***F(x)***, teda $\xi' = \xi$ **.**

Dôkaz:

$$F_{\xi'}(x) = P\{\xi' < x\} = P\left\{\int_{-\infty}^{\xi'} dF(x') < \int_{-\infty}^{x} dF(x')\right\} = P\{\alpha < F(x)\} = F(x),$$

teda ξ' je rozdelená podľa ***F(x).***

Príklady

1. Doba života miónu τ :

Náhodná premenná τ má distribučnú funkciu $F(x) = 1 - \exp(-\lambda\, x)$. Vychádzajúc z rovnice (3.12) máme:

$$\int_{-\infty}^{\tau} dF(x) = F(\tau) = \alpha \leftarrow \text{rovnomerne rozdelené v (0, 1)}$$

$$1 - \exp(-\lambda\, \tau) = \alpha \qquad \Rightarrow \qquad \tau = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha)$$

resp.

$$\tau = -\frac{1}{\lambda}\ln(\alpha)$$

lebo $1-\alpha$ je náhodná premenná rovnomerne rozdelená v intervale (0,1).

Vektorová náhodná premenná.

Nech náhodné premenné $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k$ majú distribučnú funkciu $F(x_1,x_2,...,x_k)$ a

$$F_1(x_1) = P(\xi_1 < x_1) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} dF(x_1,...,x_k) = \int_{-\infty}^{x_1} dx'_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dx_k\, p(x'_1, x_2, \ldots x_k)$$

$$F_2(x_1, x_2) = P(\xi_2 < x_2 \mid x_1) = \frac{\int_{-\infty}^{x_2} dx'_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dx_k\, p(x_1, x'_2, \ldots x_k)}{\int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dx_k\, p(x_1, x_2, \ldots x_k)} \qquad (3.13)$$

$$F_k(x_1, x_2, \ldots x_k) = P(\xi_k < x_k \mid x_1, \ldots x_{k-1}) = \frac{\int_{-\infty}^{x_k} dx'_k\, p(x_1, x_2, \ldots x'_k)}{\int_{-\infty}^{\infty} dx_k\, p(x_1, x_2, \ldots x_k)}$$

potom veličiny $\xi'_1, \xi'_2, ..., \xi'_k$, ktoré sú riešením postupnosti rovníc:

$$\begin{aligned} &F_1(\xi'_1) = \alpha_1 \\ &F_2(\xi'_1, \xi'_2) = \alpha_2 \\ &\ldots \\ &F_k(\xi'_1, \xi'_2, \ldots \xi'_k) = \alpha_k \end{aligned} \qquad (3.14)$$

sú rozdelené v súlade s funkciou $F(x_1,x_2, ..., x_k)$.

Nech hustota pravdepodobnosti náhodnej premennej ξ sa dá vyjadriť vo forme radu:

$\boldsymbol{f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)}$, kde $\boldsymbol{f_k(x)\geq 0}$ a náh. premenná α je rovnomerne rozdelená v (0,1).

Označme si:

$$\boldsymbol{p_k=\int_{-\infty}^{\infty} f_k(x)\ dx,\ \Phi_k(x)=\int_{-\infty}^{x} f_k(t)\ dt,}$$
$$\boldsymbol{a_0=0,\ a_k=\sum_{i=1}^{k} p_i,\ k=1\ ,\ 2\ ,\cdots} \tag{3.15}$$

potom náh. premenná $\xi'=\Phi_k^{-1}(\alpha-a_{k-1})$ pri $a_{k-1}\leq\alpha\leq a_k$ má hustotu rozdelenia ***f(x)***.

Dôkaz. Funkcia $\boldsymbol{F_k(x)=\Phi_k(x)/p_k}$ je distribučnou funkciou. Preto pri podmienke $a_{k-1}\leq\alpha\leq a_k$ náhodná veličina $\boldsymbol{F_k^{-1}\left((\alpha-a_{k-1})/p_k\right)}$ má podmienenú hustotu pravdepodobnosti $\boldsymbol{f_k(x)/p_k}$ (je zrejme, že pri splnení podmienky $\boldsymbol{a_{k-1}\leq\alpha\leq a_k}$ je náhodná veličina $\boldsymbol{(\alpha-a_{k-1})/p_k}$ rozdelená rovnomerne v (0, 1)). Avšak evidentne platí:

$$F_k^{-1}\left(\frac{\alpha-a_{k=1}}{p_k}\right)=\frac{1}{p_k}\Phi_k^{-1}\left(\frac{\alpha-a_{k=1}}{p_k}\right)=\Phi_k^{-1}\left(\alpha-a_{k=1}\right)=\xi'$$

Teda s pravdepodobnosťou p_k má náhodná veličina ξ' podmienenú hustotu pravdepodobnosti $\boldsymbol{f_k(x)/p_k}$. Odkiaľ vyplýva:

$$f_{\xi'}(x)=\sum_{k=1}^{\infty} p_k\cdot\frac{f_k(x)}{p_k}=f(x) \quad \text{q.e.d.}$$

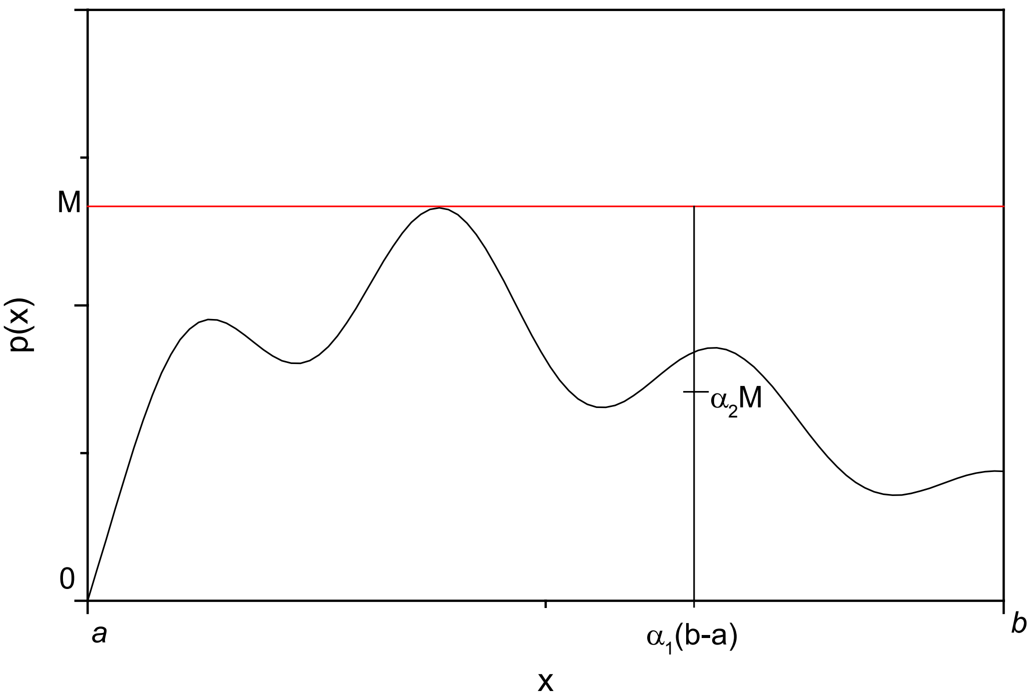
Príklad. Relayho zákon molekulárneho rozptylu svetla v atmosfére je popísaný hustotou pravdepodobnosti: $f(x)=\frac{3}{8}\left(1+x^2\right),\quad -1\leq x\leq +1\quad (x\equiv\cos\theta)$. V tomto prípade:

$\boldsymbol{f_1(x)=\frac{3}{8},\ f_2(x)=\frac{3}{8}x^2\ \ -1\leq x\leq +1}$. Odtiaľto dostávame:

$$\begin{array}{ll} p_1=\dfrac{3}{4} & p_2=\dfrac{1}{4} \\ \Phi_1(x)=\dfrac{3}{8}(x+1) & \Phi_2(x)=\dfrac{1}{8}\left(x^3+1\right) \end{array} \quad \text{a} \quad \xi=\begin{cases} \dfrac{8}{3}\alpha-1 & \alpha\leq\dfrac{3}{4} \\ (8\alpha-1)^{1/3} & \alpha>\dfrac{3}{4} \end{cases} \tag{3.16}$$

3.4 Špeciálne metódy modelovania

Majme náhodnú premennú ξ s hustotou pravdepodobnosti $p(x)$ definovaná v $D \equiv (a,b)$ takú, že $\boldsymbol{p(x)}$ je v D ohraničená, t.j. pre každé $\boldsymbol{x \in D} \Rightarrow \boldsymbol{p(x) \leq M}$.



Obr. 2: Generovanie náhodnej premennej so zložitou hustotou pravdepodobnosti .

Generujme α_1 a α_2, kde α_i je rovnomerne rozdelená na (0,1) a definujme :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})\alpha_1 \\ \boldsymbol{y} &= \alpha_2 \boldsymbol{M} \end{aligned} \tag{3.17}$$

ak $\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{p(x)} \Rightarrow \boldsymbol{x}$ je realizácia ξ, ak nie pokus opakujeme. Takýmto spôsobom konštruovaná postupnosť veličín x je postupnosťou realizácií ξ.

Realizácia náhodnej veličiny ξ:

1. generujeme náhodný vektor $\boldsymbol{(a+(b-a)\alpha_1,\ \alpha_2 M)}$;
2. prvú komponentu považujeme za realizáciu ξ, ak druhá komponenta spĺňa podmienku $\boldsymbol{\alpha_2 M < p(x)}$

Dôkaz:

Náhodný vektor $(\xi',\eta') \equiv (a+(b-a)\alpha_1,\ \alpha_2 M)$ je rovnomerne rozdelený v $(a,b)\times(0,M)$. Ak prejdeme k náhodnému vektoru $(\xi,\eta) \equiv (\xi',\eta') / \alpha_2 M < p(x)$, potom tento náhodný vektor je rovnomerne rozdelený v oblasti G $\equiv(a,b) \times (0, p(x))$ a jeho distribučná funkcia je

$$f_2(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y)\in G \\ 0 & (x,y)\notin G \end{cases} \tag{3.18}$$

Pre distribučnú funkciu ξ platí:

$$F'(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} dt \int_{-\infty}^{\infty} du \cdot f_2(t,u) = \int_{-\infty}^{x} dt \int_{-\infty}^{p(t)} du = \int_{a}^{x} p(t)dt = F(x)$$

q.e.d.

Metóda rejekcie (odmietania)

Veta 1. Nech $\varphi(x)=\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ je nezáporná funkcia definovaná a integrovateľná v n–mernom kvádri $D \equiv \{a_i \le x_i \le b_i\}_{i=1}^{n}$ a pritom $\varphi(\mathbf{x}) \le M$ pre každé $x \in D$, kde M je konštanta . Ďalej nech $(\alpha'_1,\ldots,\alpha'_n)$ je vektorová náhodná premenná s rovnomerným rozdelením v D a α je náhodná premenná s rovnomerným rozdelením v $(0, 1)$, potom hustota zodpovedajúca podmienenej pravdepodobnosti

$$P\{\alpha'_i < x_i, i = 1,\ldots,n \mid \alpha M \le \varphi(\alpha'_i,\ldots,\alpha'_n)\} \tag{3.19}$$

je totožná s $c\cdot\varphi(x_1,\ldots,x_n)$, kde c je normovacia konštanta.

Dôkaz:

Hustota pravdepodobnosti pre vektorovú náhodnú premennú $\left(\alpha_1',\dots,\alpha_n'\right)$ je $c\cdot\chi(t_1,\dots,t_n)$

kde χ je indikátor oblasti D ($\chi(t_1,\cdots,t_n)=\begin{cases} 1 & (t_1,\cdots,t_n)\in D \\ 0 & (t_1,\cdots,t_n)\notin D \end{cases}$). Pre vyššie zmienenú podmienenú pravdepodobnosť dostávame:

$$P\{x_i \le \alpha_i' < x_i + \partial x_i; i = 1..n \mid \varphi(\vec{\alpha}') \ge M\alpha\} = \frac{c\int\limits_{x_i}^{x_1+\partial x_1} dt_1 \dots \int\limits_{x_n}^{x_n+\partial x_n} dt_n \int\limits_0^1 dt\, \chi\left(t_1,\dots t_n : \varphi(t_1,\dots t_n) \ge Mt\right) =}{c\int\limits_{x_1}^{x_1+\partial x_1} dt_1 \dots \int\limits_{x_n}^{x_n+\partial x_n} dt_n \quad \varphi\left(t_1,\dots t_n\right)} \tag{3.20}$$

Kde $\chi\left(t_1,\dots t_n : \varphi(t_1,\dots t_n) \ge Mt\right)$ je indikátor množiny premenných $t_1,\dots,t_n$ pre ktoré platí nerovnosť $\varphi(t_1,\dots t_n) \ge Mt$. Analogicky:

$$c^{-1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_n \int\limits_0^1 dt\, \chi\left(t_1,\dots t_n : \varphi(t_1,\dots t_n) \ge Mt\right) = \int\limits_{-\infty_1}^{\infty} dt_1 \dots \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_n \varphi\left(t_1,\dots t_n\right) \tag{3.21}$$

Algoritmus:

1. Generujeme $n+1$ čísel $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ a α_{n+1}
2. Ak n–tica $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, ktoré spĺňa podmienku:

   $$\varphi\left(a_1 + (b_1 - a_1)\alpha_1, \dots, a_1 + (b_n - a_n)\alpha_n\right) \ge M\,\alpha_{n+1}$$

3. konštruujeme $\xi_i = a_i + (b_i - a_i)\alpha_i$ pre $i=1,\dots,n$
4. Ak nie – procedúru opakujeme.

Veta 2. Ak $\varXi$ je vektorová náhodná premenná s hustotou pravdepodobnosti $c\varphi(x_1,...,x_n)$ v oblasti $D \equiv \left\{ \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i) \right\}$ a ξ je pri každom $\varXi = (x_1,...,x_n)$ rozdelená rovnomerne v intervale $[0,\ c\varphi(x_1,...,x_n)\ ]$, potom náhodný vektor $(\varXi,\xi)$ je rovnomerne rozdelený v $(n+1)$–mernej oblasti definovanej nerovnosťami:

$$a_1 \le x_1 < b_1,\ ...,\ a_n \le x_n < b_n$$

$$0 \le x_{n+1} < c \cdot \varphi(x_1,..,x_n) \cdot$$

Veta 3. Nech náhodná premenná η je funkciou náhodného vektora $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $\eta = f(\xi_1,...,\xi_n)$ a $\varphi(x_1,...,x_n)$ je hustota rozdelenia náhodného vektora $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ potom platí

$$P\left\{ c \le \eta \le d \right\} = \iiint\limits_{c \le f(x_1,\cdots x_n) \le d} \varphi\left(x_1, x_2, \cdots, x_n \right)\ dx_1 \dots dx_n\ . \qquad (3.22)$$

Veta 4. Nech náhodné vektory $(\xi_1,\dots, \xi_n)$ a $(\eta_1,\dots, \eta_n)$ majú hustoty rozdelení $p_{\varXi}(x_1,..,x_n)$ resp. $p_H(y_1, ..,y_n)$ a $\eta_i = f_i(\xi_1,\dots,\xi_n)$ $(i=1,\dots,n)$ je zobrazenie s nenulovým jakobiánom $\varPhi = \dfrac{\partial\left(f_1,\cdots, f_n \right)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}$, potom hustoty rozdelenia $p_{\varXi}$ a p_H spĺňajú vzťah:

$$p_H\left(y_1,\cdots, y_n \right) = p_{\varXi}\left(f_1(x_1,\dots,x_n),\cdots, f_n(x_1,\dots,x_n) \right) \left| \varPhi \right| \ . \qquad (3.23)$$

Veta 5. Nech ξ_1 a ξ_2 sú nezávislé náhodné premenné s hustotami pravdepodobností $p_1(x)$ resp. $p_2(x)$, potom hustota pravdepodobnosti $p(y)$ sumy ξ_1 a ξ_2 sa rovná konvolúcii:

$$p(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(y-x) \cdot p_2(x)\, dx \qquad (3.24)$$

Modelovanie rovnomerného rozdelenia na povrchu sféry.

Základná myšlienka spočíva v ***generovaní bodov rovnomerne rozdelených vnútri gule***. Potom sa nájde priesečník (*P*) priamky vedenej vygenerovaným bodom z centra gule (*O*) a povrchom gule. Takto nájdené priesečníky sú rovnomerne rozdelené po povrchu gule. Jednotkové vektory ležiace na spojnici *OP* vykazujú priestorovú izotropiu.

Algoritmus:

1. Generovať náhodný vektor $\tilde{\alpha} = \left(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3\right)$, kde $\tilde{\alpha}_i = \alpha_i - \mathbf{0.5}$ $\mathbf{(}\boldsymbol{i} = \mathbf{1, 2, 3)}$ sú náhodné veličiny s rovnomerným rozdelením v intervale *(-0.5, 0.5)* **(**α_i je rovnomerne rozdelené v *(0,1)*).

2. Ak náhodný vektor $\tilde{\alpha}$ spĺňa podmienku:

   $$\tilde{\alpha}_1^2 + \tilde{\alpha}_2^2 + \tilde{\alpha}_3^2 \leq \mathbf{1/4} \qquad (3.25)\ ,$$

   teda odpovedajúci bod sa nachádza vnútri gule s polomerom ½, potom vytvoriť vektor: $\tau = \left(\tau_1, \tau_2, \tau_3\right)$, kde $\tau_i = \dfrac{\tilde{\alpha}_i}{\sqrt{\tilde{\alpha}_1^2 + \tilde{\alpha}_2^2 + \tilde{\alpha}_3^2}}$ sú smerové kosinusy jednotkového vektora s izotropným rozdelením.

3. Ak náhodný vektor $\tilde{\alpha}$ nespĺňa podmienku (3.25) , opakovať body 1 a 2.

Úloha:

Modelovať rozpad

$$\eta(\pi^0) \rightarrow \gamma\gamma$$

za predpokladu, že $\eta(\pi^0)$-mezón sa rozpadá v pokoji, hmotnosť $\eta(\pi^0)$-mezónu je $m_\eta=547.30\ MeV$ ($m_\pi=134.98\ MeV$), rozpad mezónu je izotropný. Detektor (viď obr.1) detekuje kvantá γ, ktorých smer výletu zviera s osou z uhol menší ako 45°. Rozpadajúci sa mezón je lokalizovaný v centre detektora (viď obr.1) .

- Energetické rozlíšenie detektora je: $\varepsilon = \dfrac{1\%}{\sqrt{E[GeV]}}$
- Súradnicové rozlíšenie je ideálne.

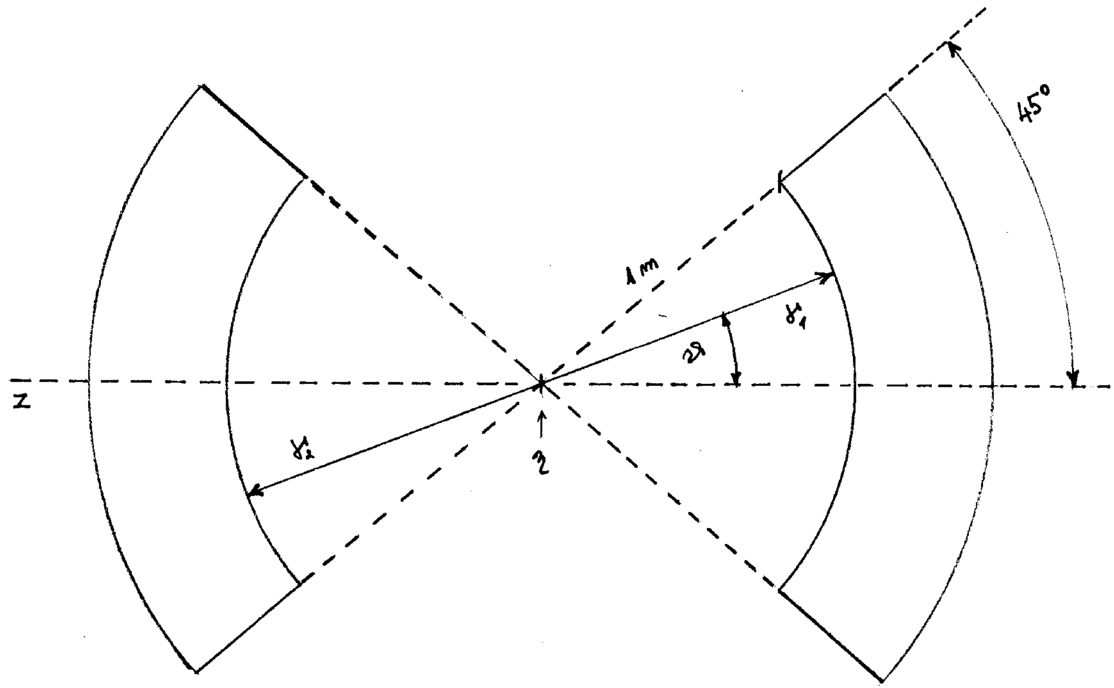
Je treba nájsť ***spektrum invariantných hmotností páru γγ*** ($m_{\gamma\gamma}$) pochádzajúcich z rozpadu vyššie uvedeného mezónu.

Invariantná hmotnosť $\boldsymbol{m_{\gamma\gamma}}$ je definovaná ako:

$$\boldsymbol{m_{\gamma\gamma}} = \sqrt{\left(\boldsymbol{E_1}+\boldsymbol{E_2}\right)^2 - \left(\vec{\boldsymbol{P}}_1+\vec{\boldsymbol{P}}_2\right)^2}$$

kde

$\left(\boldsymbol{E_i}, \vec{\boldsymbol{P}}_i\right)$ $\boldsymbol{i = 1, 2}$ sú 4-hybnosti γ-kvánt.



Obr. 3: Detektor kvánt gamma, oba segmenty detektora sú kúžeľovitým výsekom z guľovej vrstvy (stena kúžeľa zviera s osou *z* uhol 45°)