

Základné pojmy teórie pravdepodobnosti a matematickej štatistiky.

Náhodný experiment: pre daný súbor podmienok nie je možné vopred určiť výsledok procesu.

Náhodný experiment je charakterizovaný :

- 1) **súborom podmienok γ** ,
- 2) **priestor elementárnych udalostí U** , t.j. množinou všetkých možných výsledkov náhodného experimentu ,
- 3) **poľom náhodných udalostí $\mathbf{A}$** , t.j. určitou neprázdna triedou podmnožín U , ktoré budeme nazývať udalosťami alebo javmi,
- 4) **pravdepodobnosťou P** definovanou na $\mathbf{A}$, t.j. nezápornou funkciou, ktorá každej udalosti $A \in \mathbf{A}$ priradí nezáporné číslo $P(A)$ predstavujúce jej pravdepodobnosť výskytu.

Príklad: hod kockou

Súbor podmienok: kocka je geometrický pravidelná, jej steny sú označené bodmi od 1 do 6 a kocka dopadá na tvrdú podložku .

Priestor elementárnych udalostí: $U = \{ \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6 \}$, kde ω_i reprezentuje udalosť padnutia i bodov.

Pole náhodných udalostí : $\mathbf{A} = \{ A_i \}$, kde $A_i = \omega_i$ pre $i=1..6$ a ďalej

$A_7 \equiv$ padol nepárny počet bodov ($A_7 = \{ \omega_1, \omega_3, \omega_5 \}$),

$A_8 \equiv$ padol párný počet bodov ($A_8 = \{ \omega_2, \omega_4, \omega_6 \}$),

$A_9 = U$ (istá udalosť), $A_0 = \emptyset$ (nemožná udalosť), atď.

Celkové existuje 2^6 udalostí, t.j. podmnožín U . Vo všeobecnosti, ak priestor elementárnych udalostí má n prvkov (kde n je konečné), potom celkový počet udalostí je 2^n .

Pravdepodobnosť : Ak istá udalosť obsahuje n možných výsledkov a m z týchto výsledkov má za následok udalosť A potom pravdepodobnosť udalosti A je $P(A)=m/n$. Napr. : $P(A_1)=1/6$, $P(A_7)=1/2$ a $P(U)=1$.

Pole náhodných udalostí $\mathbf{A}$: Je to neprázdna trieda podmnožín priestoru elementárnych udalostí U, ktorá má nasledujúce vlastnosti:

1) Ak $A \in \mathbf{A}$, potom $A' \in \mathbf{A}$.

2) Ak $A_n \in \mathbf{A}$ pre $n=1,2,\dots$, potom $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbf{A}$ ($\mathbf{A}$ je σ -algebra)

Prvky poľa $\mathbf{A}$ budeme nazývať náhodnými udalosťami.

Poznámka. A' je opačná alebo komplementárna udalosť: $A' = U - A$, teda je to množina tých elementárnych udalostí, ktoré patria do U ale nepatria do A.

Pravdepodobnosť : Každý náhodnej udalosti $A \in \mathbf{A}$ je priradené nezáporné číslo $P(A)$, ktoré nazývame pravdepodobnosťou náhodnej udalosti A, pritom platí:

$$a) \quad P(U) = 1$$

$$b) \quad P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (1)$$

ak náhodné udalosti $A_1, A_2, \dots, A_n$ sú po dvoch disjunktné (neprekrývajú sa).

Funkcia $P(A)$ definuje na $\mathbf{A}$ pravdepodobnostnú mieru.

Pravdepodobnostný priestor (U, $\mathbf{A}$, P):

Každý náhodný experiment je charakterizovaný súborom podmienok γ a trojicou $(U, \mathbf{A}, P)$, ktorú budeme nazývať pravdepodobnostným priestorom.

Poznámka. Vyššie definovaná pravdepodobnosť je prirodzeným zovšeobecnením následovnej úvahy. Ak náhodný experiment opakujeme n-krát , pritom m pokusov vedie k náhodnej udalosti A, potom tejto udalosti môžeme priradiť číslo $h_A=m/n$ predstavujúce relatívny výskyt udalosti A. Limita

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}$$

sa nazýva pravdepodobnosťou udalosti A a evidentne spĺňa podmienky (1).

Vlastnosti pravdepodobnosti.

1. Nech je dané $P(A)$ pre každé $A \in \mathcal{A}$ potom pre pravdepodobnosť opačnej udalosti platí: $P(A') = 1 - P(A)$.
2. Nech náhodné udalosti A, B sú také, že $B \subset A$, potom
 - a) $P(A - B) = P(A) - P(B)$
 - b) $P(B) \leq P(A)$
3. Nech A je ľubovoľná náhodná udalosť, potom platí
$$0 \leq P(A) \leq 1.$$
4. Pre ľubovoľné dve náhodné udalosti A, B $\in \mathcal{A}$ platí
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Podmienená pravdepodobnosť. Nech $(U, \mathcal{A}, P)$ je ľubovoľný pravdepodobnostný priestor a nech $B \in \mathcal{A}$ je nejaká náhodná udalosť, pre ktorú platí $P(B) > 0$. Potom množinová funkcia

$$p_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

definovaná pre každé $A \in \mathcal{A}$ je tiež pravdepodobnostnou mierou priestoru $(U, \mathcal{A})$.

Pravdepodobnostnú mieru $p_B(A)$ pre $A \in \mathcal{A}$ nazývame podmienenou pravdepodobnosťou náhodnej udalosti A vzhľadom na náhodnú udalosť B.

Nezávislé udalosti. Je zrejmé, že platí

$$(1) \quad P(A \cap B) = P(B) \cdot p_B(A)$$

Dôležitý prípad nastane, keď $p_B(A) = P(A)$. Vtedy platí

$$(2) \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Takéto udalosti (spĺňajúce (2)) nazývame nezávislými udalosťami.

Náhodná premenná.

Každý elementárnej udalosti $\omega \in U$ má význam priradiť reálne číslo (n-ticu čísel) charakterizujúcich túto udalosť.

$$\xi: U \rightarrow E_n \text{ (euklidovský priestor)}$$

Náhodnou veličinou (premennou) definovanou na pravdepodobnostnom priestore $(U, \mathcal{A}, P)$ je ľubovoľnú reálnu funkciu $\xi(\omega)$, kde $\omega \in U$, nadobúdajúca konečné hodnoty a spĺňajúca podmienku:

množina $\{\omega : \xi(\omega) < x \text{ (} x \text{ je reálne)}\}$ patrí do poľa náhodných udalostí $\mathcal{A}$.

(Hovoríme, že $\xi(\omega)$ je $\mathcal{A}$ -merateľná funkcia.)

Iná definícia: via systém **Borelových množín $\mathcal{b}$** .

Borelova množina: základom sú intervaly $\langle a, b \rangle$. Množina, ktorá vznikne zjednotením spočítateľného počtu intervalov $\langle a, b \rangle$ patrí do systému $\mathcal{b}$. Dá sa ukázať, že tento systém obsahuje aj všetky uzavreté intervaly, špeciálne 1-bodové množiny, všetky spočítateľné množiny a mnoho iných. Náhodná veličina ξ zobrazí udalosť $A \in \mathcal{A}$ do nejakej Borelovej množiny $B \in \mathcal{b}$.

Vo všeobecnosti

$$\xi: U \rightarrow \mathcal{b}_n \text{ (systém Borelových množín na } E_n \text{)}.$$

Ľubovoľnú reálnu funkciu $\xi(\omega)$, kde $\omega \in U$, nadobúdajúca konečné hodnoty nazývame

náhodnou premennou na pravdepod. priestore $(U, \mathcal{A}, P)$, ak pre ľubovoľnú Borelovú množinu $B \in \mathcal{b}$ platí:

$$\xi^{-1}(B) = \{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}.$$

Příklad 1: *hod kockou*

Priestor elementárnych udalostí $U = \{ \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6 \}$.

Definujme si funkciu $\xi(\omega_n) = n$. Je to náhodná veličina, lebo množina

$\{ \omega: \xi(\omega) < x \} \in A$, teda predstavuje udalosť pre ľubovoľné reálne x .

Napr.: $\{ \omega: \xi(\omega) < 2.7 \} = \{ \omega_1, \omega_2 \} \in A$

$\{ \omega: \xi(\omega) < 4.1 \} = \{ \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \} \in A$

$\{ \omega: \xi(\omega) < 1.0 \} = \emptyset \in A$

$\{ \omega: \xi(\omega) < x(>6) \} = U \in A$

Příklad 2: *rozpad miónu*

Súbor podmienok $\gamma \equiv$ v čase $t=0$ máme nerozpadnutý mión.

Priestor elementárnych udalostí $U = \{ \omega_t, t \in <0, \infty) \}$, kde elementárna udalosť

$\omega_t \equiv$ mión sa rozpadol v čase t .

Pole náhodných udalostí $A = \{ \bigcup_{i=1}^n \omega(t_1^i, t_2^i), \omega(t_1^i, t_2^i), t_1^i < t_2^i \text{ reálne} \}$, kde

$\omega(t_1, t_2)$ predstavuje udalosť rozpadu miónu v časovom intervale $<t_1, t_2)$ (prítom $\omega(t, t+0) = \omega_t$).

Pravdepodobnostná miera:

$$P[\omega(0, t)] = 1 - \exp(-\lambda t)$$

kde $\omega(0, t) \equiv$ rozpad miónu v časovom intervale $<0, t)$.

Náhodnú veličinu $\xi(\omega)$ si môžeme definovať nasledovne:

$$\xi(\omega_t) = t$$

Táto veličina je náhodnou veličinou, lebo $\{ \omega: \xi(\omega) < x \} = \omega(0, x) \in A$.

Iný príklad:

$\xi(\omega_t) = t^2$ je tiež náhodnou veličinou, lebo $\{ \omega: \xi(\omega) < x \} = \omega(0, \sqrt{x}) \in A$.

Distribučná funkcia.

Pre každú náhodnú veličinu $\xi(\omega)$ je jednoznačne definovaná *distribučná funkcia*

$$F_{\xi}(x) = P\{\omega: \xi(\omega) < x\} \quad (2),$$

ktorá je nezápornou, neklesajúcou a zľava spojitou funkciou takou, že

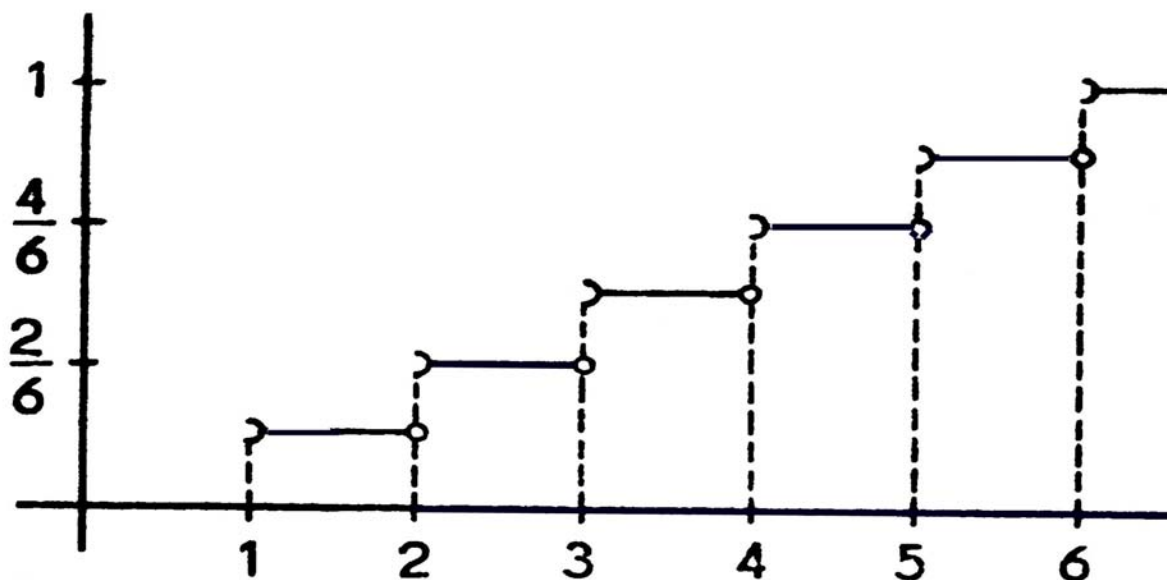
$$F_{\xi}(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x) = 0 \quad \text{a} \quad F_{\xi}(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F_{\xi}(x) = 1 \quad (3).$$

Priklad 1: hod kockou

$U = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, $P(\omega_n) = 1/6$ pre $n=1..6$, $\xi(\omega_n) = n$ potom

$F_{\xi}(x) = P\{\omega: \xi(\omega) < x\}$ môžeme reprezentovať tabuľkou:

x	1	2	3	4	5	6	>6
$F_{\xi}(x)$	0	1/6	1/3	1/2	2/3	5/6	1



Príklad 2: rozpad miónu

$U = \{ \omega_t, t \in <0, \infty \}$, kde elementárna udalosť $\omega_t \equiv$ mión sa rozpadol v čase t .

Pravdepodobnostná miera: $P\{\omega(0,t)\} = 1 - \exp(-\lambda t)$

kde $\omega(0,t) \equiv$ rozpad miónu v časovom intervale $<0,t)$.

Náhodná veličina $\xi(\omega)$ je definovaná nasledovne: $\xi(\omega_t) = t$

Keďže $\{ \omega: \xi(\omega) < x \} = \omega(0,x)$ pre distribučnú funkciu dostávame:

$$F_\xi(x) = P\{\omega: \xi(\omega) < x\} = P\{\omega(0,x)\} = 1 - \exp(-\lambda x)$$

Hustota pravdepodobnosti.

$$dF_\xi(x) = F_\xi(x+dx) - F_\xi(x) = P\{\omega: x \leq \xi(\omega) < x+dx\} = P\{d\omega\}$$

Hustotou pravdepodobnosti je potom

$$p_\xi(x) = \frac{dF_\xi(x)}{dx}. \quad (4)$$

Vzťahom (4) je určená hustota pravdepodobnosti pre spojitú náhodnú veličinu.

Pre diskretnú náhodnú veličinu platí:

$$\begin{aligned} p_k &= F(x_k + 0) - F(x_k) \\ F(x) &= \sum_k p_k \text{ kde } k : x_k < x \end{aligned} \quad (5)$$

ξ indukuje na systéme Borelových množín mieru

$$\pi\{(-\infty, x)\} = F(x) \text{ alebo } p(dx) = dF(x).$$

Vo všeobecnosti možno povedať, že náhodná veličina ξ indukuje pravdepodobnostný priestor (E_n, B_n, π) :

$$\xi: (U, \mathcal{A}, P) \rightarrow (E_n, B_n, \pi) \quad (6)$$

Stredná hodnota náhodnej veličiny:

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot dF_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_{\xi}(x) \cdot dx = \int_U \xi(\omega) \cdot P(d\omega) \quad (7)$$

Pre diskretnú náhodnú veličinu platí:

$$E(\xi) = \sum_k x_k p_k \quad (8)$$

Ak ξ je náhodnou veličinou, potom je náhodnou veličinou aj $g(\xi)$, kde g je reálna funkcia. Nás bude zaujímať: $g(\xi) = (\xi - a)^k$

Veličinu $\mu'_k = E[(\xi - a)^k]$ nazývame všeobecným momentom k -tého rádu vzhľadom na konštantu a .

$$\mu'_k = E[(\xi - a)^k] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^k p_{\xi}(x) dx \quad (9)$$

Ak $a = 0$ potom $\nu_k = E[\xi^k]$ nazývame **počiatočným momentom k -tého rádu**. Ak $a = E(\xi) = \mu$ potom $\mu_k = E[(\xi - E(\xi))^k]$ nazývame **centrálным momentom k -tého rádu**. Centrálny moment 2. rádu μ_2 nazývame disperziou $D(\xi)$ a veličinu $\sigma_{\xi} = \sqrt{D(\xi)}$ smerodajnou odchýlkou.

$$\mu_2 = D(\xi) = E[(\xi - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 p_{\xi}(x) dx \quad (10)$$

Ak $g(\xi) = \exp(it\xi)$ potom $\varphi(t) = E[\exp(it\xi)]$ je charakteristickou funkciou náhodnej premennej ξ . Dá sa ukázať, že rozvoj charakteristickej funkcie v bode $t=0$ vedie k radu, ktorého koeficienty sú momentmi náhodnej veličiny ξ .

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= E[\exp(it\xi)] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) p_{\xi}(x) dx \\
&= 1 + it \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi}(x) dx + \frac{(it)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_{\xi}(x) dx + \frac{(it)^3}{3!} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 p_{\xi}(x) dx + \dots \quad (11) \\
&= 1 + \frac{it}{1!} \nu_1 + \frac{(it)^2}{2!} \nu_2 + \frac{(it)^3}{3!} \nu_3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \nu_n
\end{aligned}$$

Vektorová náhodná veličina.

Ak náhodnú elementárnu udalosť charakterizujeme n -ticu reálnych čísel a sú splnené rovnaké predpoklady ako v 1-rozmernom prípade, potom máme n -rozmernú (vektorovú) náhodnú veličinu $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$.

Pre n -rozmernú náhodnú veličinu $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ môžeme definovať **kovariančnú maticu**:

$$\text{cov}(\xi_k, \xi_l) = E[(\xi_k - E(\xi_k))(\xi_l - E(\xi_l))] \quad (12a)$$

a veličinu

$$\rho(\xi_k, \xi_l) = \frac{\text{cov}(\xi_k, \xi_l)}{\sqrt{D(\xi_k)D(\xi_l)}} \quad (12b)$$

korelačným koeficientom.

Vlastnosti distribučnej funkcie pre n -rozmernú náhodnú veličinu ξ :

$$\begin{aligned}
F(-\infty, x_2, \dots, x_n) &= F(x_1, \dots, x_{n-1}, -\infty) = 0 \\
F(\infty, \dots, \infty) &= 1
\end{aligned} \quad (13)$$

Pre **hustotu pravdepodobnosti** analogicky ako v jedno rozmernom prípade platí:

$$p_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{dF_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{dx_1 dx_2 \dots dx_n}. \quad (14)$$