

Niektoré typy rozdelení pravdepodobností

Binomická náhodná veličina

Náhodná premenná ξ má binomické rozdelenie pravdepodobnosti, ak pravdepodobnostná funkcia má tvar:

$$P_n(\xi = j) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \quad n \in N \quad \text{a} \quad p \in (0,1) \quad (15)$$

Príklad: **Fotokonverzia.**

Nech n fotónov dopadá na fotokatódu fotonásobiča. Fotón má nenulovú pravdepodobnosť p konvertovať na fotoelektrón. Počet vytvorených fotoelektrónov je náhodná veličina nadobúdajúca hodnoty $\xi = j$, kde $j=0,1,\dots,n$.

Pravdepodobnosť toho, že j určitých fotónov prekonvertuje a ostatné $(n-j)$ neprekonvertujú je:

$p^j (1-p)^{n-j}$ a $\binom{n}{j}$ je počet spôsobov koľkými si môžeme vybrať j fotónov z celkového počtu (n) fotónov.

Normovanie:
$$\sum_0^n P_n(\xi = j) = \sum_0^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} = 1$$

Stredná hodnota:
$$E(x) = \sum_0^n j \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} = n \cdot p \quad (16)$$

Disperzia:
$$D(x) = \sum_0^n (j - np)^2 \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} = n \cdot p(1-p)$$

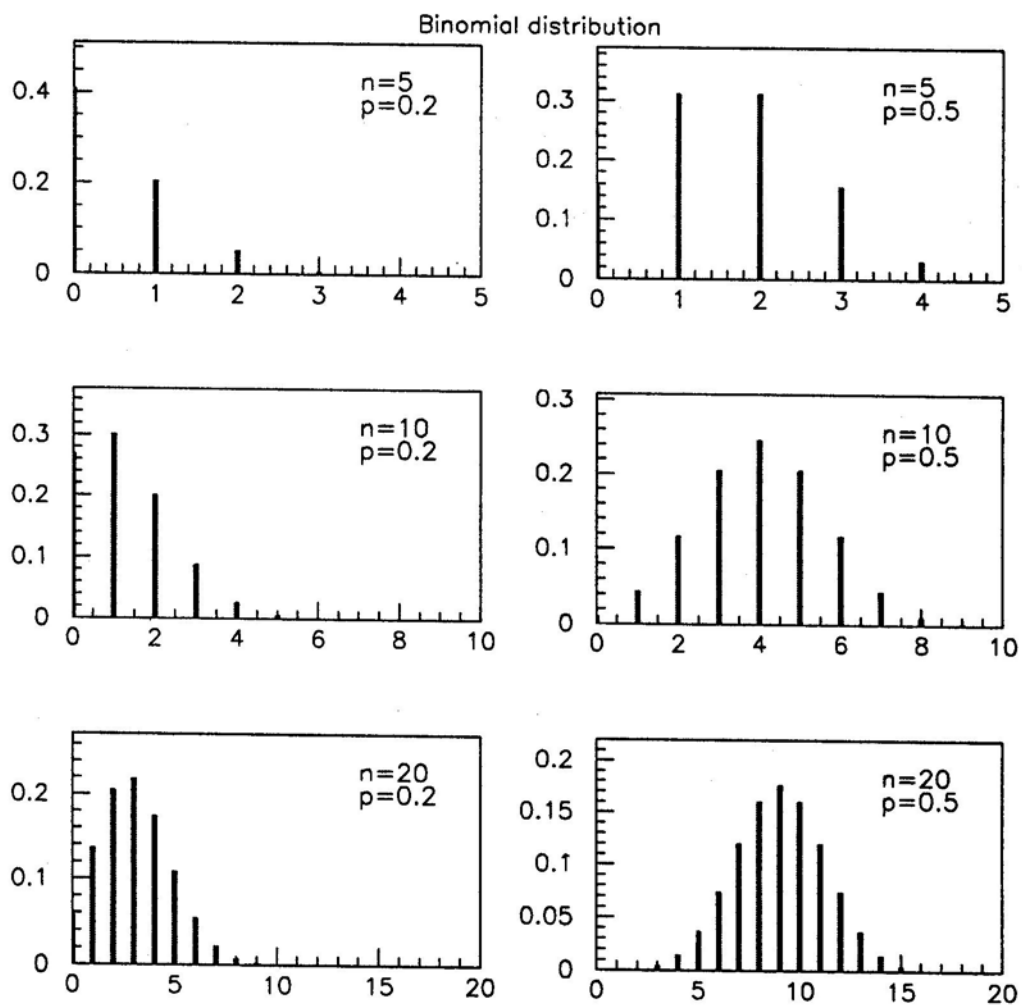


Figure 1: Binomické rozdelenie pre rôzne hodnoty N a p .

Poissonova náhodná veličina.

Náhodná premenná ξ má **Poissonovo rozdelenie** pravdepodobnosti, ak pravdepodobnostná funkcia má tvar:

$$P(\xi = r) = \frac{\mu^r \exp(-\mu)}{r!} \text{ pre } r = 0, 1, 2, \dots \text{ a } \mu > 0 \quad (17)$$

Príklad: Počet rozpadov rádioaktívnych jadier v určitom časovom intervale.

Poissonovo rozdelenie je možné dostať z binomického rozdelenia limitným prechodom: $n \rightarrow \infty$ a $np \rightarrow \mu$.

$$\sum_{r=0}^{\infty} P(\xi = r) = e^{-\mu} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mu^r}{r!} = e^{-\mu} \cdot e^{\mu} = 1 \quad (18)$$
$$E(\xi) = \mu, \quad D(\xi) = \mu$$

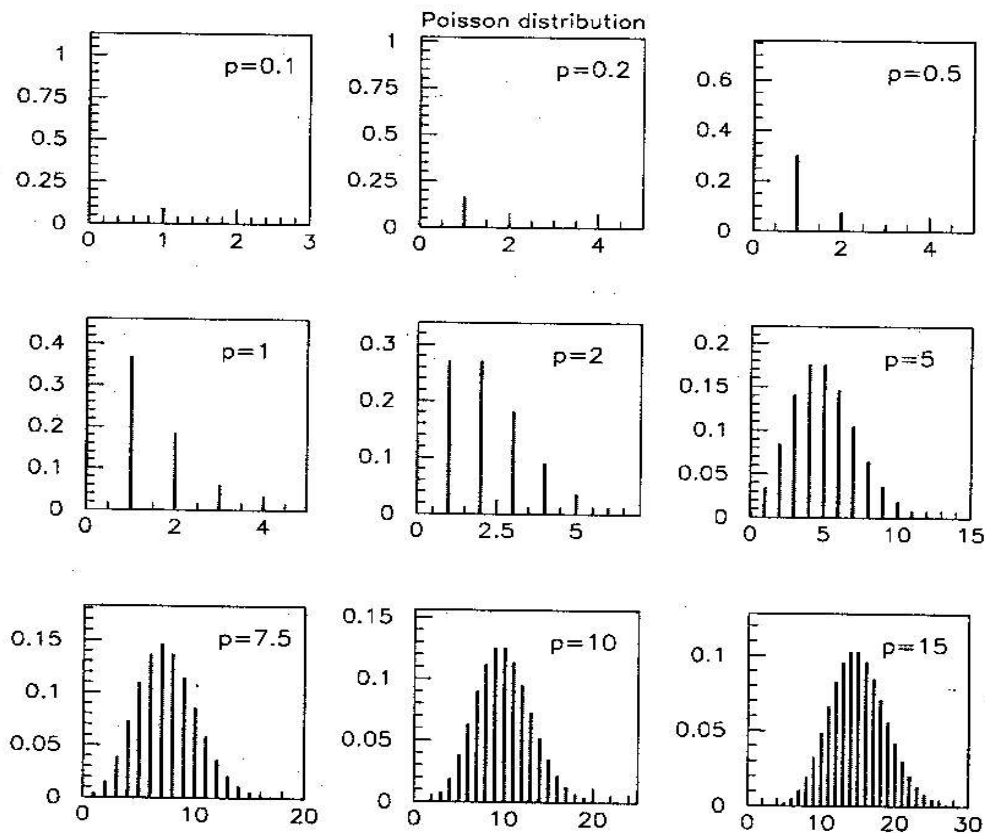


Figure 2: Poissonovo rozdelenie pre rôzne stredné hodnoty

Náhodná premenná s exponenciálnym rozdelením pravdepodobnosti

Je to diskétna náhodná premenná ξ , ktorá má nasledovné rozdelenie pravdepodobnosti:

$$P_{\xi}(n) = \frac{1}{N} \exp\left(-\frac{n}{N}\right), \quad E(\xi) = N, \quad D(\xi) = N^2 \quad (19)$$

Takáto náhodná premenná popisuje jav elektrónovej lavíny v plynových detektoroch, teda popisuje počet elektrón-iónových párov iniciovaných jedným elektrónom primárnej ionizácie.

Poznámka. Platí to za predpokladu, že koeficient plynového zosilnenia N je veľké ($N \gg 1$) a energia získaná elektrónom od elektrického poľa je oveľa väčšia ako stredná ionizačná energia.

Spojité náhodná premenná s obdĺžnikovým rozdelením pravdepodobnosti

Je to náhodná premenná, ktorej hustota pravdep. je daná vzťahom:

$$p(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{1}{(b-a)} & x \in (a, b) \\ 0 & x \geq b \end{cases} \quad (19)$$
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{(x-a)}{(b-a)} & x \in (a, b) \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

Stredná hodnota: $E(\xi) = \frac{b+a}{2}$

Disperzia: $D(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Náhodná premenná s normálnym rozdelením pravdepodobnosti

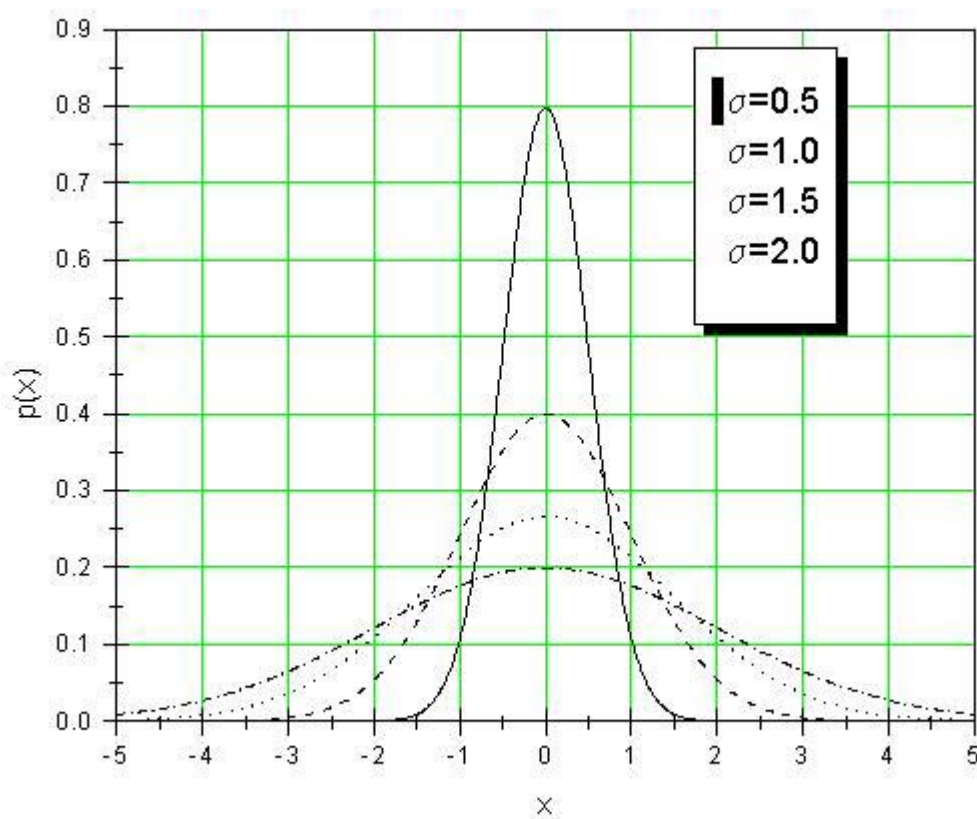
Je to náhodná premenná s nasledovným rozdelením:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in (-\infty, \infty)$$
$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \rightarrow F(+\infty) = 1 \quad (20)$$

Stredná hodnota a disperzia:

$$E(\xi) = a, \quad D(\xi) = \sigma^2 \quad (21)$$

Náhodná veličina s distribučnou funkciou (resp. hustotou pravdepodobnosti) (20) sa tiež nazýva náhodnou veličinou s **Gaussovým rozdelením**.



Vektorová náhodná veličina s normálnym rozdelením.

Majme n -rozmernú náhodnú veličinu $\mathcal{E} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ kde ξ_i ($i=1, \dots, n$) sú nezávislé náhodné veličiny s normálnym rozdelením, pričom platí:

$$E(\xi_i) = a_i, \quad D(\xi_i) = \sigma_i^2 \quad i = 1, \dots, n$$

V tomto prípade kovariančná matica má nasledovný tvar:

$$\Delta = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Pre hustotu pravdepodobnosti platí

$$\begin{aligned} p(x_1, \dots, x_n) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \prod_i \sigma_i} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - a_i)^2}{\sigma_i^2} \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\det \Delta)^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{a}) \Delta^{-1} (\vec{x} - \vec{a})^T \right] \end{aligned} \quad (22)$$

Kde $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\vec{a} = (a_1, a_n)$ a T je symbol transponovania.

Druhá časť výrazu (22) platí aj vo všeobecnosti, teda v prípade, že $\xi_1, \dots, \xi_n$ nie sú nezávislé (Δ je nediagonálna).

Náhodná premenná s Gamma-rozdelením pravdepodobnosti

Je to náhodná veličina, ktorej hustota pravdepodobnosti je

$$p(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \cdot \beta^\alpha} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}} \quad (23)$$

kde $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} \cdot e^{-y} dy$ je tzv. Gamma-funkcia s vlastnosťami:

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1) \cdot \Gamma(\alpha-1) \quad \text{and} \quad \Gamma(n+1) = n! \quad \text{pre } n \text{ celé.}$$

Cvičenie: Ukážte, že v prípade Γ -rozdelenia stredná hodnota a disperzia sú:

$$E(\xi) = \alpha \cdot \beta \quad D(\xi) = \alpha \cdot \beta^2 \quad (24)$$

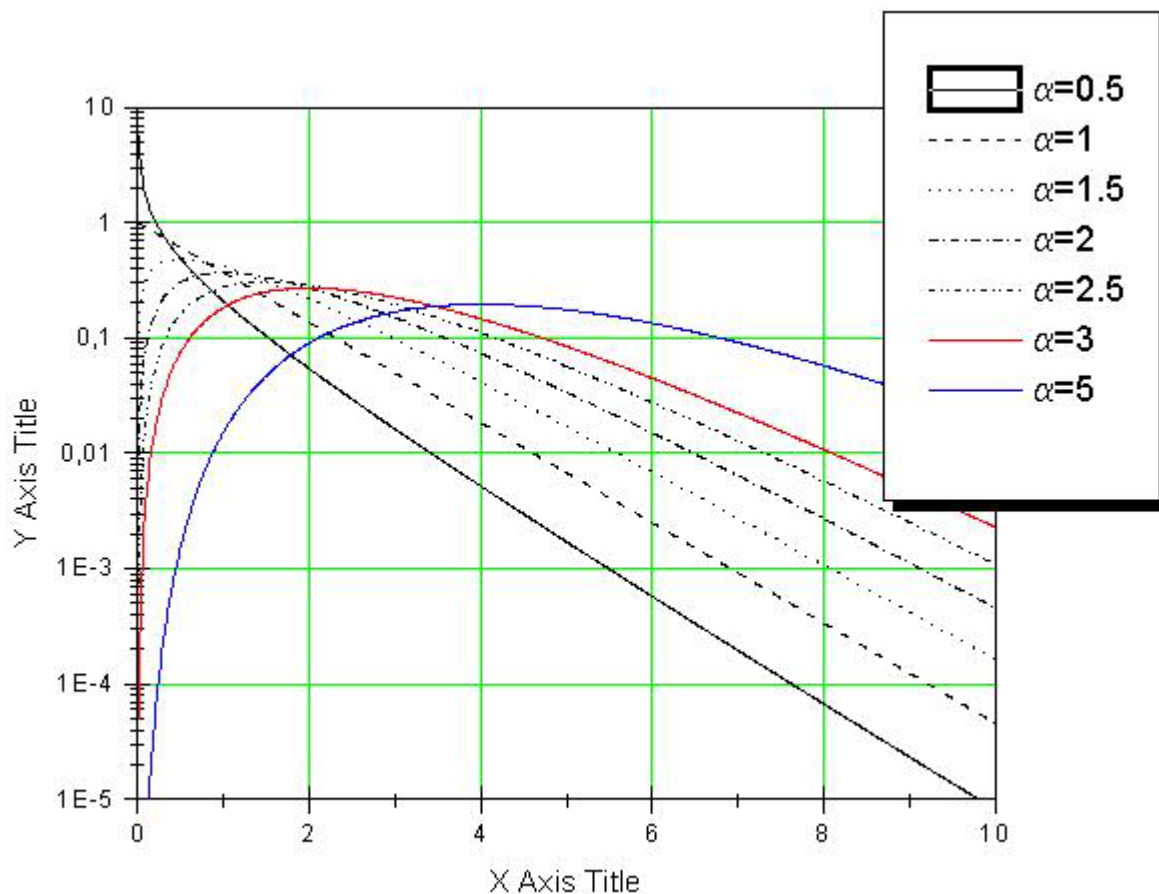


Figure 4: Gamma rozdelenie pre $\alpha = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3$ a 5

Náhodná premenná s Cauchyho rozdelením pravdepodobnosti

Je to náhodná veličina, ktorej hustota pravdepodobnosti je:

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} \quad (25)$$

Zodpovedá to nasledovnej situácii: majme pištoľ umiestnenú vo vzdialenosti l m od steny rotujúcu konštantnou uhlovou rýchlosťou a strieľajúcu raz za otočku v smere dopredu.

V tom prípade:

$$p(\theta) = d\theta / \pi \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

kde θ je uhol streľby a keďže platí: $\theta = \text{Arc tan}(x)$ $d\theta = dx/(1+x^2)$ dostávame:

$$p(x)dx = \frac{d\theta}{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot dx$$

Cauchyho rozdelenie má nulovú strednú hodnotu nekonečnú disperziu! Dokážte!

Náhodná premenná s χ^2 -rozdelením pravdepodobnosti

Je to náhodná veličina, ktorej hustota pravdepodobnosti je:

$$p_{\chi^2}(x) = \frac{1}{2^{k/2} \Gamma(k/2)} \cdot x^{k/2-1} \cdot e^{-x/2} \quad (26)$$

Je to špeciálny prípad Γ -rozdelenia s $\alpha=k/2$ a $\beta=2$. Odpovedá náhodnej veličine χ^2 , ktorá je sumou k štvorcov náhodných premenných η_i ($i=1, \dots, k$) s normálnym rozdelením ($N(0, 1)$):

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \eta_i^2 \quad (27)$$

Hra dôležitú úlohu pri testoch hypotéz!

Pre strednú hodnotu a disperziu platí (dokážte to): $E(\chi^2) = k$ $D(\chi^2) = 2k$

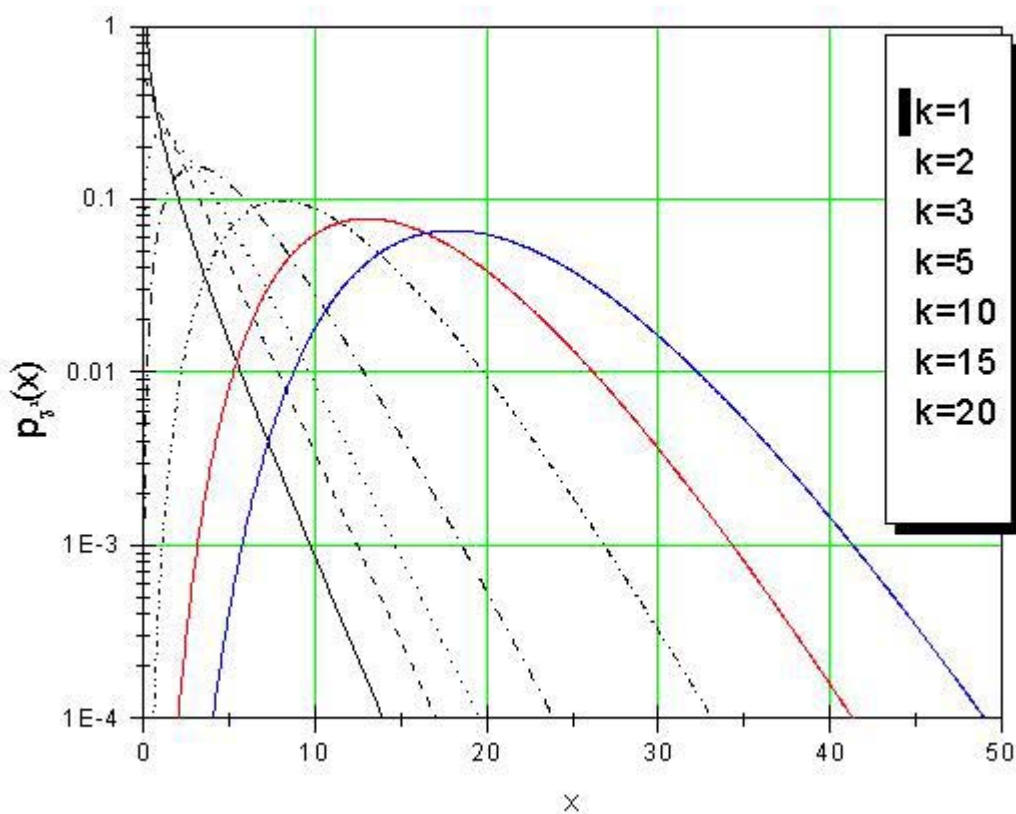


Figure 5: Rozdelenie χ^2 pre rôzny počet stupňov voľnosti

Centrálna limitná veta.

Pre náhodnú veličinu ξ so strednou hodnotou a ($< \infty$) a disperziou σ^2 ($< \infty$) platí **Čebyševova nerovnosť**:

$$P(|\xi - a| \geq k \cdot \sigma) \leq \frac{1}{k^2} \quad (28)$$

Dôkaz:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 \cdot p(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{a-k\sigma} (x - a)^2 \cdot p(x) dx + \int_{a-k\sigma}^{a+k\sigma} (x - a)^2 \cdot p(x) dx + \int_{a+k\sigma}^{\infty} (x - a)^2 \cdot p(x) dx \\ &\geq \int_{-\infty}^{a-k\sigma} (x - a)^2 \cdot p(x) dx + \int_{a+k\sigma}^{\infty} (x - a)^2 \cdot p(x) dx \end{aligned}$$

Avšak pre všetky x v uvedených intervaloch platí: $(x - a)^2 \geq (k\sigma)^2$.

Teda dostávame:

$$\sigma^2 \geq (k\sigma)^2 \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{a-k\sigma} p(x) dx + \int_{a+k\sigma}^{\infty} p(x) dx \right\}$$

Čím je Čebyševova nerovnosť dokázaná, lebo integrál v poslednej nerovnosti predstavuje pravdepodobnosť, že $|\xi - a| \geq k\sigma$.

Nech $\xi_1, \dots, \xi_n$ sú nezávislé náhodné veličiny s rovnakým rozdelením a pritom

$$E(\xi_k) = a \quad (< \infty), \quad D(\xi_k) = \sigma^2 \quad (< \infty) \quad k = 1, \dots, n, \text{ označme si}$$

$$\eta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$$

potom pre ľubovoľné ε kladné platí:

$$1. \quad P(|\eta - a| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Náhodná veličina η konverguje k a (vyplýva z Čebyševovej nerovnosti).

2. Rozdelenie pravdepodobnosti veličiny η je v asymptotike ($n \rightarrow \infty$) normálne s disperziou σ^2/n a strednou hodnotou a (**centrálna limitná veta**)

Centrálna limitná veta graficky.

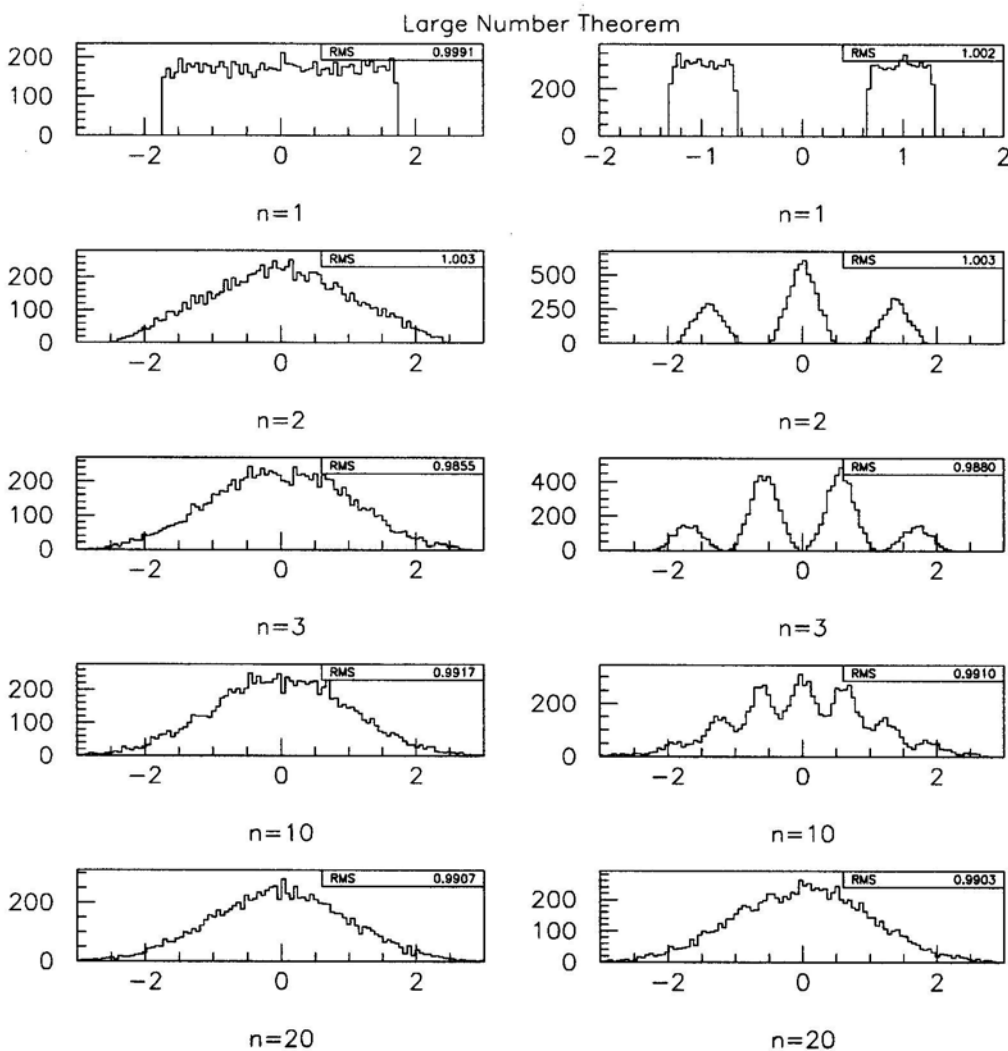


Figure 6: Na vrchnom obrázku sú rozdelenia dvoch náhodných premenných. Na grafoch pod nimi sú rozdelenia aritmetických priemerov týchto n.p. pre rôzne počty sčítancov (v týchto priemeroch).