

Základné princípy QCD. Úloha farebného náboja.

Doteraz sme predpokladali, že úlohu partónov v protóne hrajú kvarky. V skutočnosti temer 50% hybnosti protónu unášajú gluóny, budeme preto predpokladať, že partónmi sú kvarky a gluóny. Aby sme mohli zohľadniť úlohu gluónov je potrebné prekročiť rámec „naivného“ partónového modelu a brať do úvahy farebný náboj partónov.

Teória, ktorá sa zaoberá dynamikou farebného náboja je **kvantová chromodynamika** (QCD). Základné princípy, o ktoré sa opiera QCD sú:

- Kvarky majú nielen elektrický ale aj farebný náboj (R, G, B).
- Výmena farebného náboja sa uskutočňuje pomocou gluónov.
- „Farebné“ interakcie sú analogické elektromagnetickým interakciám: Feynmanove diagramy dostaneme zamenou $\sqrt{\alpha} \rightarrow \sqrt{\alpha_s}$ v každom vertexe, teda štruktúra qqg je formálne ekvivalentná $ee\gamma$.
- Gluóny nesú farebný náboj, teda môžu medzi sebou interagovať.
- Pri malých vzdialenostiach (veľké Q^2) väzbová konštanta silných interakcií α_s je malá – teda je aplikovateľná poruchová teória.

Ukážeme si ako sa zmení obraz **ep**-rozptylu, keď berieme do úvahy dynamiku farebného náboja. Základnými prejavmi gluónovej dynamiky sú:

- Kvark môže vyžiariť gluón do aj po interakcii s virtuálnym fotónom.
- Terčový gluón môže dať príspevok prostredníctvom tvorby párov: $\gamma^* g \rightarrow q\bar{q}$.

Základné prejavy gluónovej dynamiky získame ak do **ep**-rozptylu zahrnieme procesy rádu $\alpha\alpha_s$ (viď. Obr.1), a nie iba elektro-magnetické procesy (procesy rádu α).

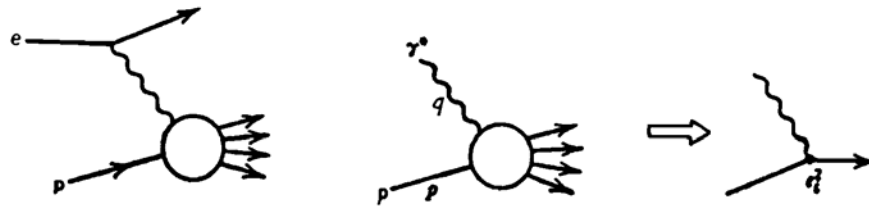
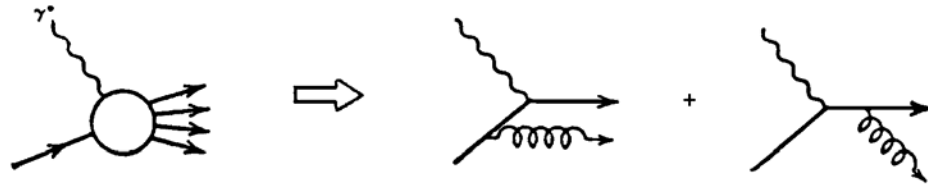
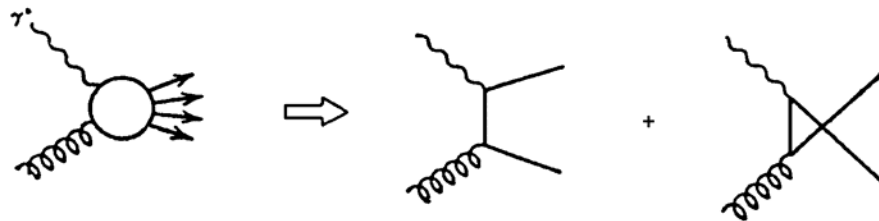


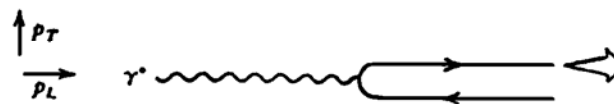
Diagram partónového modelu pre proces $ep \rightarrow eX$



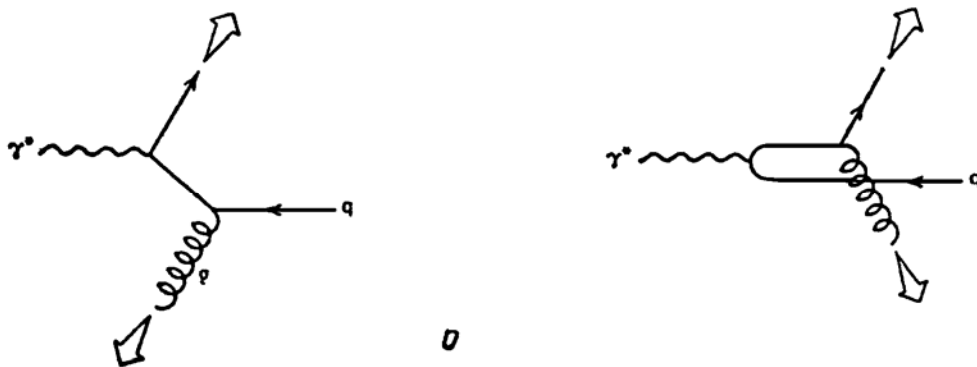
Vklad rádu $\alpha\alpha_s$ ($\gamma^*q \rightarrow qg$) do účinného prierezu procesu $ep \rightarrow eX$.



Vklad (rádu $\alpha\alpha_s$) iniciovaný gluónom hlboko-nepružnej zrážky ($\gamma^*g \rightarrow q\bar{q}$) do účinného prierezu procesu $ep \rightarrow eX$.



α



α

- a) diagram partónového modelu pre proces $\gamma^*q \rightarrow q$ vudúceho k zrodu jetu s $p_T=0$
- b) diagramy s vyžiarením gluónu zodpovedajúceho vzniku jetu s $p_T \neq 0$

Obr. 1:Zahrnutie procesov rádu $\alpha\alpha_s$ do ep -rozptylu.

Dôsledky zahrnutia procesov rádu $\alpha\alpha_s$

Hlavnými dôsledkami zahrnutia procesov s gluónami sú:

- Narušenie scalingu pre štruktúrne funkcie.
- Kvarok finálneho stavu nebude kolineárny s virtuálnym fotónom, teda jeho $\mathbf{p}_T \neq 0$ (vzhľadom na smer virtuálneho fotónu).

Účinný prierez $\mathbf{ep} \rightarrow \mathbf{eX}$ je daný nepružnými formfaktormi:

$$F_1 = MW_1(\nu, Q^2) \text{ a } F_2 = \nu W_2(\nu, Q^2), \quad (1)$$

ktoré po zahrnutí procesov rádu $\alpha\alpha_s$ do $\mathbf{ep}$ -rozptylu budú funkciami $\nu (= \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} / M)$ a $Q^2 (= -q^2)$, čo je dôsledkom narušenia scalingu, a nielen funkciami $\omega = 2M\nu/Q^2$.

Pre vzťah medzi protónovým a partónovým účinným prierezom ($\gamma^* \mathbf{p}$ vs $\gamma^* \mathbf{parton}$) je dôležité si uvedomiť, že v hlboko-nepružnej limite platí:

$$2F_1 = \frac{\sigma_T}{\sigma_0} \text{ a } \frac{F_2}{x} = \frac{\sigma_T + \sigma_L}{\sigma_0} \quad (2)$$

kde σ_T, σ_L sú účinné prierezy pohltienia priečných a pozdĺžnych fotónov a $\sigma_0 = 4\pi^2\alpha/s$.

Vzťahy (2) sa vzťahujú k γ^* -protónovému a nie k γ^* -partónovému účinnému prierezu.

Aby sme prešli na partónovú úroveň, uvažujme proces vyžiarenia gluónu $\gamma^* \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{qg}$.

Porovnanie protónového a partónového rozptylu je v nasledujúcej tabuľke:

$\gamma^* \text{ protón}$	$\rightarrow$	$\gamma^* \text{ partón}$
$\mathbf{p}$	$\rightarrow$	$\mathbf{p}_i = y\mathbf{p}$
$x = \frac{Q^2}{2\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}$	$\rightarrow$	$z = \frac{Q^2}{2\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{q}} = \frac{x}{y}$

Vzťah medzi σ_T/σ_0 (protónový rozptyl) a $\hat{\sigma}_T/\hat{\sigma}_0$ (partónový rozptyl) je:

$$\left(\frac{\sigma_T(x, Q^2)}{\sigma_0} \right)_{\gamma^* \mathbf{p}} = \sum_i \int_0^1 dz \int_0^1 dy f_i(y) \delta(x - zy) \left(\frac{\hat{\sigma}_T(z, Q^2)}{\hat{\sigma}_0} \right)_{\gamma^* \mathbf{i}} \quad (3)$$

kde $f_i(y)$ je štruktúrna funkcia partónu “i” v protóne, t.j. hustota pravdepodobnosti toho, že zasiahnutý partón bude mať relatívnu hybnosť y,

$\hat{\sigma}_T(z, Q^2)$ je účinný prierez pohltienia priečného fotónu partónom s relatívnou hybnosťou y zahŕňajúci aj procesy rádu $\alpha\alpha_s$,

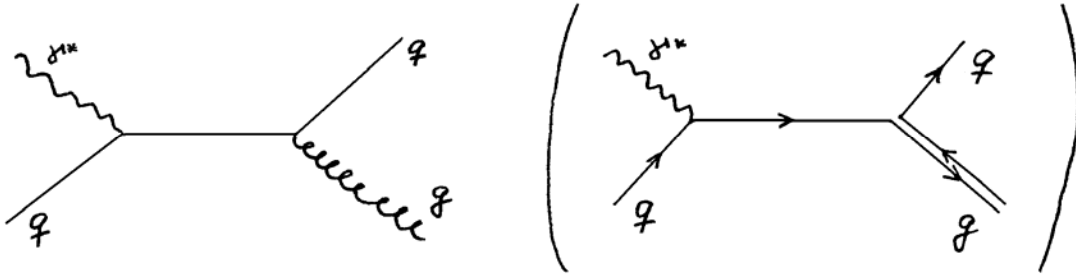
$\delta(x-zy)$ zabezpečuje, že premenná x (charakterizuje γ^*p -proces) bude fixovaná: partón po interakcii (pohltienie γ^* a vyžiarenie gluónu) bude mať hybnosť $p_{out} = \underbrace{xp}_{\gamma^* \text{ proton}} = \underbrace{zp_i}_{\gamma^* \text{ parton}}$

Po integrácii cez z dostávame:

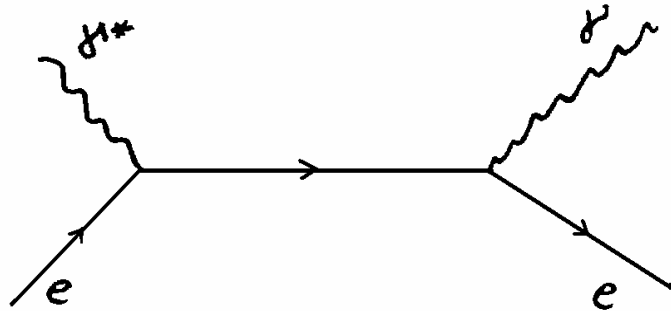
$$\left(\frac{\sigma_T(x, Q^2)}{\sigma_0} \right)_{\gamma^* p} = \sum_i \int_0^1 \frac{dy}{y} f_i(y) \left(\frac{\hat{\sigma}_T\left(\frac{x}{y}, Q^2\right)}{\hat{\sigma}_0} \right)_{\gamma^* i} \quad (4)$$

Gluónová emisia

QCD-proces $\gamma^* q \rightarrow qg$ je z hľadiska „diagramovej štruktúry“ analogický QED-procesu $\gamma^* e \rightarrow \gamma e$. Napríklad diagram na Obr.2 má podobnú štruktúru ako diagram pre Comptonov efekt (Obr.3):



Obr. 2: Diagram procesu $\gamma^* q \rightarrow qg$ a diagram ukazujúci tok farebného náboja.



Pre štvorec modulu amplitúdy presumovaný cez finálne spiny a spriemerovaný cez počiatkové spiny platí (5):

$$\overline{|M|^2} = 32\pi\alpha^2 \left(-\frac{u}{s} - \frac{s}{u} + \frac{2tQ^2}{su} \right)$$

Obr. 3: Diagram comptonovho rozptylu - amplitúda vyjadrená cez Mandelstamove premenné (doplnok A).

Amplitúdu pre proces $\gamma^* q \rightarrow qg$ dostaneme z amplitúdy pre proces $\gamma^* e \rightarrow \gamma e$ zámennou:

- $\alpha^2 \rightarrow e_i^2 \alpha \alpha_s$,
- zavedieme „farebný“ koeficient $4/3$,
- uskutočnime zámennu $u \leftrightarrow t$, ktorá je spojená s rôznym poradím výletu finálnych častíc (oproti $e\gamma^*$ -procesu) $\Rightarrow$ lúnia pôvodného kvarku prechádza do finálneho gluónu, zatiaľčo v $\gamma^* e \rightarrow \gamma e$ „prechádza“ do finálneho elektrónu.

Amplitúdu procesu $\gamma^* q \rightarrow qg$ je preto možné vyjadriť ako

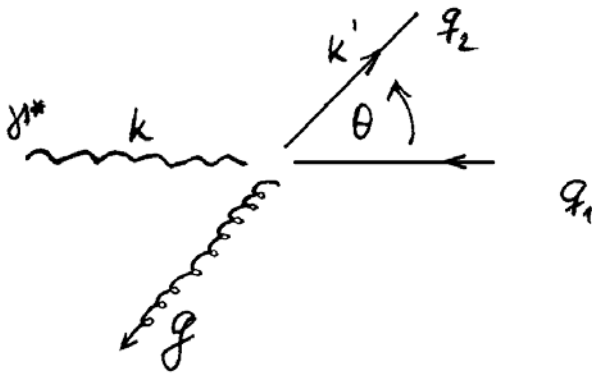
$$|\overline{M}|^2 = 32\pi e_i^2 \alpha \alpha_s \frac{4}{3} \left(-\frac{\hat{t}}{\hat{s}} - \frac{\hat{s}}{\hat{t}} + \frac{2\hat{u}Q^2}{\hat{s}\hat{t}} \right), \quad (6)$$

kde $\hat{s}$, $\hat{t}$ a $\hat{u}$ sa vzťahuje na partóny.

Prečo koeficient 4/3?

Každá farebná lúnia môže niesť 3 farby (R, G, B). Pritom vyžiarený gluón môže byť jednou z 8 rôznych di-farebných nábojových kombinácií (farebný singlet nenesie farebný náboj). Spriemerovanie cez 3 farebné počiatočné stavy dáva $8/3$. Faktor 2 oproti (6) je dôsledkom „historickej“ definície α_s .

Bude nás zaujímať priečna hybnosť kvarku (interagujúceho s virtuálnym fotónom) vzhľadom na smer pohybu virtuálneho fotónu $p_T = k' \cdot \cos \theta$ (vid'. Obr.4).



Platí:

$$\begin{aligned} \hat{s} &= 2k^2 + 2k \cdot q_0 - Q^2 = 4k'^2 \\ \hat{t} &= -2k \cdot k'(1 - \cos \theta) \\ \hat{u} &= -2k \cdot k'(1 + \cos \theta) \end{aligned} \quad (7)$$

$\hat{s}, \hat{t}, \hat{u}$ sú Mandelstamove premenné na partónovej úrovni.

Obr. 4: Vyžiarenie gluónu kvarkom

Zo vzťahu (7) vyplýva

$$p_T^2 = \frac{\hat{s}\hat{t}\hat{u}}{(\hat{s}+Q^2)^2} \quad (8)$$

Pri malých uhloch rozptylu ($-\hat{t} \ll \hat{s}$) platí:

$$p_T^2 = -\frac{\hat{s}\hat{t}}{\hat{s}+Q^2}, \quad d\Omega = \frac{4\pi}{\hat{s}} dp_T^2 \quad (9)$$

Ak použijeme vzťah medzi účinným prierezom a $|\overline{M}|^2$ pre malé uhly dostaneme:

$$\frac{d\sigma}{dp_T^2} \approx \frac{1}{16\pi\hat{s}^2} |\overline{M}|^2 = -\frac{8\pi e_i^2}{3\hat{s}^2} \alpha\alpha_s \frac{1}{\hat{t}} \left(\hat{s} + \frac{2(\hat{s}+Q^2)Q^2}{\hat{s}} \right) \quad (10)$$

Zavedením premennej $z = \frac{Q^2}{2p_i \cdot q} = \frac{Q^2}{\hat{s}+Q^2}$ dostávame:

$$\frac{d\sigma}{dp_T^2} \approx -e_i^2 \hat{\sigma}_0 \frac{1}{p_T^2} \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}(z) \quad (11)$$

kde

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{4\pi^2\alpha}{\hat{s}} \text{ a } P_{qq}(z) = \frac{4}{3} \left(\frac{1+z^2}{1-z} \right) \quad (12)$$

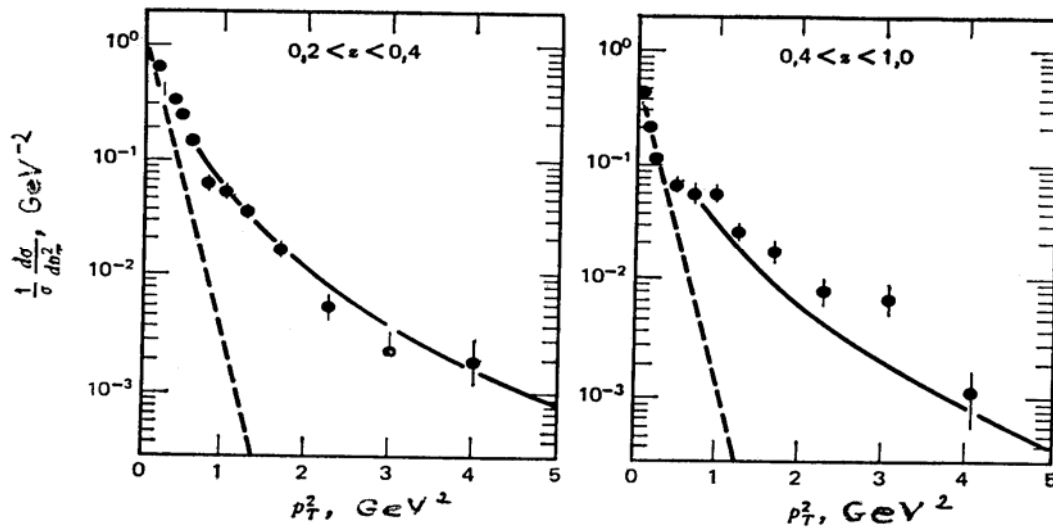
P_{qq} predstavuje hustotu pravdepodobnosti toho, že kvark vyžiari gluón a tým zmenší svoju hybnosť z -krát ($\tilde{p} \rightarrow z\tilde{p}$).

Singularita pri $z \rightarrow 1$ je spojená s vyžiaréním mäkkého gluónu (infračervená katastrofa). Je možné ukázať, že singularita sa vytratí, keď berieme do úvahy aj diagramy s virtuálnymi gluónmi.

Proces $\gamma^* q \rightarrow qg$ dáva hlavný vklad pre $-\hat{t} \ll \hat{s}$. V iných prípadoch je treba brať do úvahy aj proces zrodu párov $q\bar{q}$ (viď ďalej).

Experiment jednoznačne potvrdzuje, že vyžiarenie gluónu vedie k existencii kvarkového a gluónového jetu v konečnom stave a ich smer nezodpovedá smeru virtuálneho fotónu.

Príklad rozdelenia hadrónov po p_T^2 pochádzajúcich z interakcie μN je na Obr.5.



Obr. 5: Rozdelenia hadrónov po p_T^2 pochádzajúcich z interakcie μN .

V partónovom modeli bez gluónov sú všetky jety kolineárne virtuálnemu fotónu (prerušovaná čiara na Obr.5) – malá priečná hybnosť je dôsledkom väzby interagujúceho kvarku na iné kvarky.

Altareliho – Pariziho (DGLAP) rovnica.

Účinný prierez vyžiarovania brzdného gluónu je (vid'.vzt'ah (11)):

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(\gamma^* q \rightarrow qg) &= \int_{\mu^2}^{\hat{s}/4} dp_T^2 \frac{d\hat{\sigma}}{dp_T^2} \approx e_i^2 \hat{\sigma}_0 \int_{\mu^2}^{\hat{s}/4} \frac{dp_T^2}{p_T^2} \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}(z) \approx \\ &\approx e_i^2 \hat{\sigma}_0 \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}(z) \ln \frac{Q^2}{\mu^2} \end{aligned} \quad (13)$$

Kde sme využili skutočnosť, že $(p_T^2)_{\max} = \frac{\hat{s}}{4} = Q^2 \frac{1-z}{4z}$ a to, že pre veľké Q^2 platí:

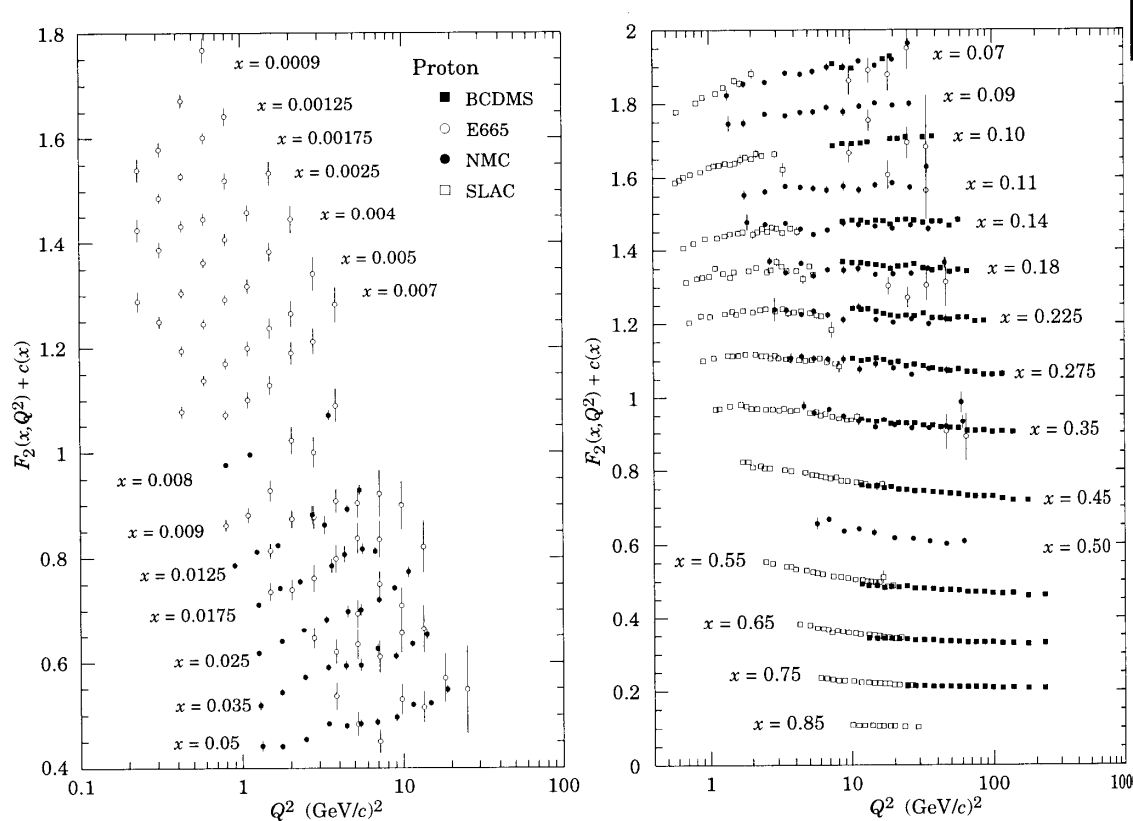
$\ln \frac{\hat{s}}{4} \approx \ln Q^2$. Integrovanie od μ^2 znamená, že neberieme do úvahy mäkké gluóny.

Účinný prierez γ^*q -interakcie zahrňujúci aj vyžiarovanie gluónu je:

$$\frac{F_2(x, Q^2)}{x} = \left| \text{diagram 1} \right|^2 + \left| \text{diagram 2} + \text{diagram 3} \right|^2 =$$

$$= \sum_q e_q^2 \int_x^1 \frac{dy}{y} q(y) \left(\delta \left(1 - \frac{x}{y} \right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq} \left(\frac{x}{y} \right) \ln \frac{Q^2}{\mu^2} \right) \quad (14)$$

Protónová štruktúrna funkcia F_2 je nielen funkciou premennej x , ale aj veličiny Q^2 . Závislosť od Q^2 je len logaritmická vedie však k narušeniu Bjorkenovho scalingu. Toto narušenie je dôsledkom vyžarovania gluónov. Tú skutočnosť, že štruktúrna funkcia F_2 je nielen funkciou premennej x , ale aj veličiny Q^2 je dobre demonštrovaná na Obr.6.



Obr. 6: Protónová štruktúrna funkcia F_2 ako funkcia Q^2 pre rôzne intervaly x .

Evolúcia kvarkových hustôt

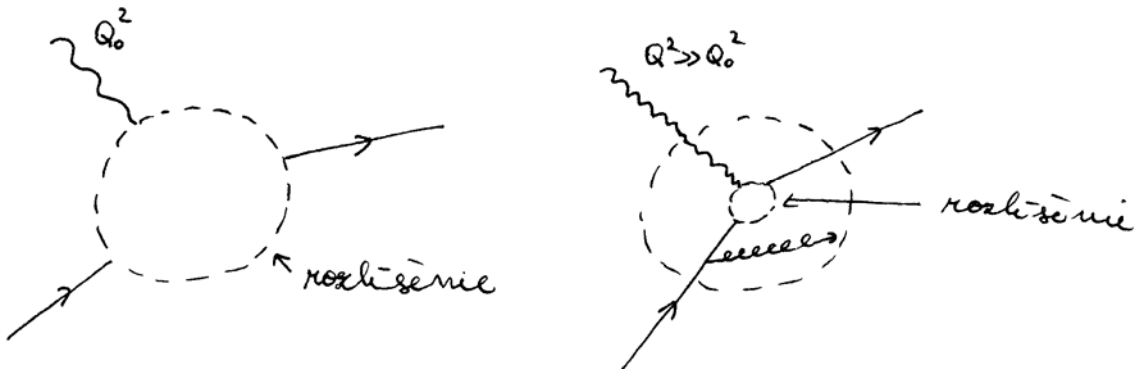
Rovnicu pre $F_2(x, Q^2)/x$ si môžeme prepísať nasledovne:

$$\frac{F_2(x, Q^2)}{x} = \sum_q e_q^2 \int_x^1 \frac{dy}{y} (q(y) + \Delta q(y, Q^2)) \delta\left(1 - \frac{x}{y}\right) = \sum_q e_q^2 [q(x) + \Delta q(x, Q^2)] \quad (15)$$

kde

$$\Delta q(x, Q^2) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu^2} \int_x^1 \frac{dy}{y} q(y) P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \quad (16)$$

Teda kvarková hustota $q(x, Q^2)$ závisí od Q^2 (viď. Obr.7).



Obr. 7: Závislosť kvarkovej hustoty od Q^2 virtuálneho fotónu.

Pri Q_0^2 fotón začína „vidieť“ partónovú štruktúru protónu. Ak by kvarky neinteragovali obraz štruktúry by sa nemenil. Podľa QCD v dôsledku silnej interakcie je každý kvark obalený oblakom partónov – túto skutočnosť musí fotón „vidieť“ pri $Q^2 \gg Q_0^2$. Ak si vyjadríme zmenu kvarkovej hustoty Δq od intervalu $\Delta \ln Q^2$ dostávame:

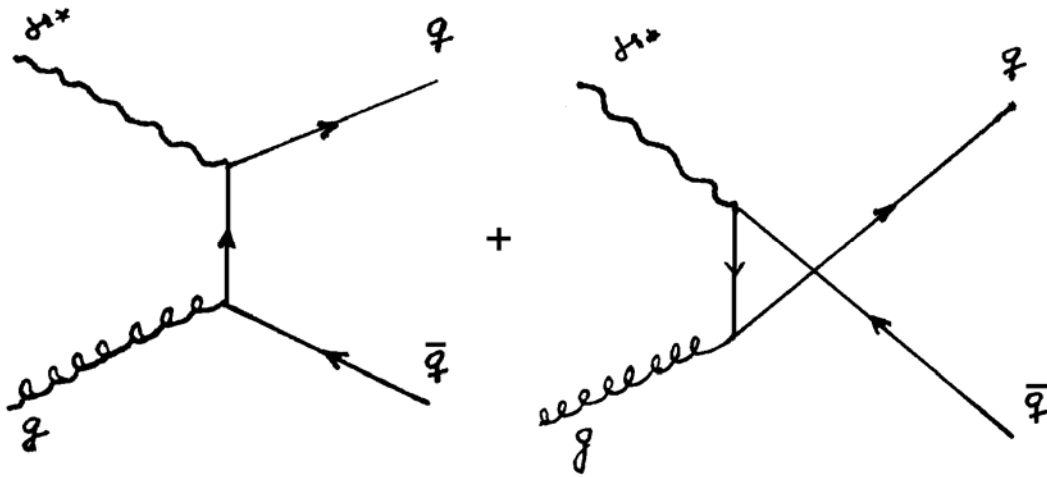
$$\frac{dq(x, Q^2)}{d \ln Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} q(y, Q^2) P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \quad (17)$$

Je to evolučná Altarelliho–Parisiho rovnica (dnes zvyčajne Dokhshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi, QGLAP). Jej interpretácia je nasledovná: kvark s relatívnou hybnosťou x (ľavá strana rovnice) môže vzniknúť z kvarku s väčšou relatívnou hybnosťou (y), ktorý vyžiaril gluón.

Význam DGLAP je v tom, že ak poznáme kvarkovú štruktúrnú funkciu pri nejakom $Q^2 = Q_0^2$ môžeme ju vypočítať pri ľubovoľnom inom Q^2 použijúc DGLAP.

Tvorba párov gluónom

Doteraz sme brali do úvahy proces $\gamma^* q \rightarrow qg$, ktorý dáva hlavný vklad pre $-\hat{t} \ll \hat{s}$. V iných prípadoch je treba brať do úvahy aj proces zrodu párov $q\bar{q}$ gluónom. Gluón, ktorý sa nachádza v protóne môže interagovať s virtuálnym fotónom prostredníctvom procesu $\gamma^* g \rightarrow q\bar{q}$ (viď. Obr.8).



Obr. 8: Tvorba $q\bar{q}$ -párov pri interakcii virtuálneho fotónu s gluónom protónu.

Amplitúdu procesu dostaneme z amplitúdy Comptonovho rozptylu zámenou $\hat{s} \leftrightarrow -\hat{t}$.

$$|\overline{M}|^2 = 32\pi^2 (e_q^2 \alpha \alpha_s) \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{u}}{\hat{t}} + \frac{\hat{t}}{\hat{u}} - \frac{2\hat{s}Q^2}{\hat{t}\hat{u}} \right) \quad (18)$$

Vklad uvedeného procesu do štruktúrnej funkcie protónu je nasledovný:

$$\begin{aligned}
\frac{F_2(x, Q^2)}{x} \Big|_{\gamma^* g \rightarrow q\bar{q}} &= \left| \text{diagram 1} + \text{diagram 2} \right|^2 = \\
&= \sum_q e_q^2 \int_x^1 \frac{dy}{y} g(y) \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qg} \left(\frac{x}{y} \right) \ln \frac{Q^2}{\mu^2}
\end{aligned} \tag{19}$$

Kde $g(y)$ je hustota gluónov v protóne a

$$P_{qg}(z) = \frac{1}{2} (z^2 + (1-z)^2), \tag{20}$$

je pravdepodobnosť toho, že gluón anihiluje na $q\bar{q}$ pár, pričom kvark poniesie podiel z jeho hybnosti.

Proces $\gamma^* q \rightarrow q\bar{q}$ modifikuje DGLAP nasledovným spôsobom:

$$\frac{dq_i(x, Q^2)}{d \ln Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[q_i(y, Q^2) P_{qq} \left(\frac{x}{y} \right) + g(y, Q^2) P_{qg} \left(\frac{x}{y} \right) \right] \tag{21}$$

kde i je typ kvarku, g -člen zohľadňuje pravdepodobnosť toho, že kvark s relatívnou hybnosťou x môže byť výsledkom zrodu páru $q\bar{q}$ počiatocným gluónom s relatívnou hybnosťou $y (> x)$ – táto pravdepodobnosť je $P_{qg}(x/y)$.

Analogickú DGLAP je možné napísať aj pre gluónovú hustotu $g(x, Q^2)$:

$$\frac{dg(x, Q^2)}{d \ln Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[q_i(y, Q^2) P_{gq} \left(\frac{x}{y} \right) + g(y, Q^2) P_{gg} \left(\frac{x}{y} \right) \right] \tag{22}$$

Suma po i sa berie cez všetky kvarky a anti-kvarky všetkých farieb a

$$P_{gg}(z) = 6 \left(\frac{1-z}{z} + \frac{z}{1-z} + z(1-z) \right) \tag{23}$$

Ak zanedbami hmotnosti kvarkov P_{gg} nezávisí od indexu i .

Fyzikálna interpretácia funkcií P .

Uvažujme proces $ep \rightarrow eX$ pri veľkých Q^2 a predpokladajme možnosť vyžiarenie gluónu interagujúcim partónom. V dôsledku tohoto procesu dochádza k zmene kvarkovej hustoty v protóne. A v súlade so (15) môžeme písať:

$$q(x) + \Delta q(x, Q^2) = \int_0^1 dy \int_0^1 dz \left[q(y, Q^2) \left(\delta(1-z) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}(z) \ln \frac{Q^2}{\mu^2} \right) \delta(x-zy) \right] =$$

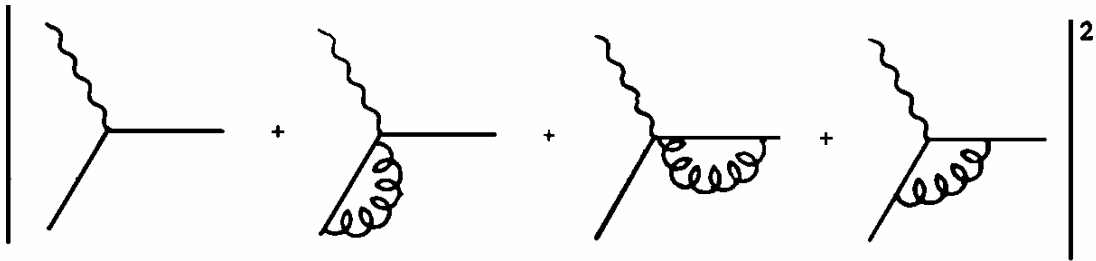
$$= \int_0^1 dy \int_0^1 dz \left[q(y, Q^2) \Pi_{qq}(z, Q^2) \delta(x-zy) \right] \quad (24)$$

$$\text{kde } \Pi_{qq}(z, Q^2) = \delta(1-z) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}(z) \ln \frac{Q^2}{\mu^2} \quad (25)$$

je možné interpretovať ako hustotu pravdepodobnosti nájsť v kvarku kvark nesúci časť z hybnosti pôvodného kvarku v prvom ráde po α_s . Člen $\delta(1-z)$ znamená, že kvark zostane bez zmeny (nevyžiari gluón). Problém vzťahov (24,25) je však v tom, že :

1. nie sú v nich zahrnuté všetky diagramy dávajúce vklad $\sim \alpha_s$ – uvažovali sme len diagramy s vyžiaréním reálneho gluónu.
2. veličina $P_{qq}(z) = \frac{4}{3} \left(\frac{1+z^2}{1-z} \right)$ diverguje pre $z=1$ (infračervená katastrofa).

Problém sa vyrieši, ak budeme uvažovať aj diagramy s virtuálnymi gluónmi, konkrétne ak prvý člen v (14) nahradíme rozšíreným členom:



Tento člen dáva vklad $\alpha\alpha_s$, ktorý zodpovedá interferencii prvého diagramu s diagramami obsahujúcimi virtuálne fotóny. Vklady interferenčných členov vykazujú tiež singularitu pri $z=1$ a navyše táto singularita sa presne ruší so singularitou prítomnou v (25) – v dôsledku tzv. Blockovej – Nordsieckovej teóremy (doplnok B). Prakticky sa singularita

typu $1/(1-z)$ funkcie P_{qq} regularizuje zavedením tzv. „plus“-distribúcie, ktorú dostaneme zámenou:

$$1/(1-z) \rightarrow 1/(1-z)_+$$

kde $1/(1-z)_+$ je definované tak, že platí:

$$\int_0^1 dz \frac{f(z)}{(1-z)_+} = \int_0^1 dz \frac{f(z) - f(1)}{(1-z)} \quad (26)$$

Po zavedení virtuálnych korekcií veličina $P_{qq}(z)$ je modifikovaná nasledovne:

$$P_{qq}(z) = \frac{4}{3} \left(\frac{1+z^2}{1-z} \right)_+ + 2\delta(1-z) \quad (27)$$

kde δ -funkcia je dôsledkom prítomnosti virtuálnych korekcií.

Doplnok A. Mandestamove premenné

Uvažujme dvoj-časticový proces (vo vstupnom aj výstupnom kanáli sú po dve častice).

Alternatívny spôsob vyjadrenia kinematických premenných, predstavujú tzv.

Mandelstamove premenné:

$$\begin{aligned} s &= (k + p)^2 \approx 2k \cdot p \approx 2k' \cdot p' \\ t &= (k - k')^2 \approx -2k \cdot k' \approx -2p \cdot p' \\ u &= (k - p')^2 \approx -2k \cdot p' \approx -2k' \cdot p \end{aligned} \quad A1$$

kde $k, p (k', p')$ sú hybnosti vstupných (výstupných) častíc.

Výhodou premených s, t a u je to, že sú to invarianty Lorentzovej grupy.

Doplnok B. Blockova – Nordsieka teoréma¹

Infračervené singularity diagramov s realnymi a virtuálnymi diagramami sa vzájomne rušia. Uvažujme proces $e^+e^- \rightarrow h$. V prvom ráde poruchovej teórie je treba brať do úvahy procesy $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ a $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$. Predpokladajme ďalej, že gluón má malú hmotnosť m_g , potom pre účinné prierezy vyššie spomínaných procesov dostaneme:

¹ V.M. Braun, Application of QCD

Proces $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ s virtuálnymi korekciami.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{e^+e^- \rightarrow q\bar{q}} &= \left| \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} \right|^2 \\
 &= \sigma_0 \left\{ 1 + \frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{\pi} \left[-2 \ln^2 \frac{Q}{m_g} + 3 \ln \frac{Q}{m_g} - \frac{7}{4} + \frac{\pi^2}{6} \right] \right\} \quad (\text{B.1})
 \end{aligned}$$

Proces $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$ s reálnym vyžiarením gluónu.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g} &= \left| \text{diagram 5} + \text{diagram 6} \right|^2 \\
 &= \sigma_0 \frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{\pi} \left[+2 \ln^2 \frac{Q}{m_g} - 3 \ln \frac{Q}{m_g} + \frac{5}{2} - \frac{\pi^2}{6} \right] \quad (\text{B.2})
 \end{aligned}$$

Účinné prierezy obidvoch vyššie spomínaných procesov divergujú pre $m_g \rightarrow 0$. Avšak v sume týchto účinných prierezov sa singularity vzájomne rušia a táto suma je nezávislá od m_g a je konečná:

$$\sigma_{tot}^{e^+e^-} = \sigma_0 \left[1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + O(\alpha_s^2) \right] \quad (\text{B.3})$$