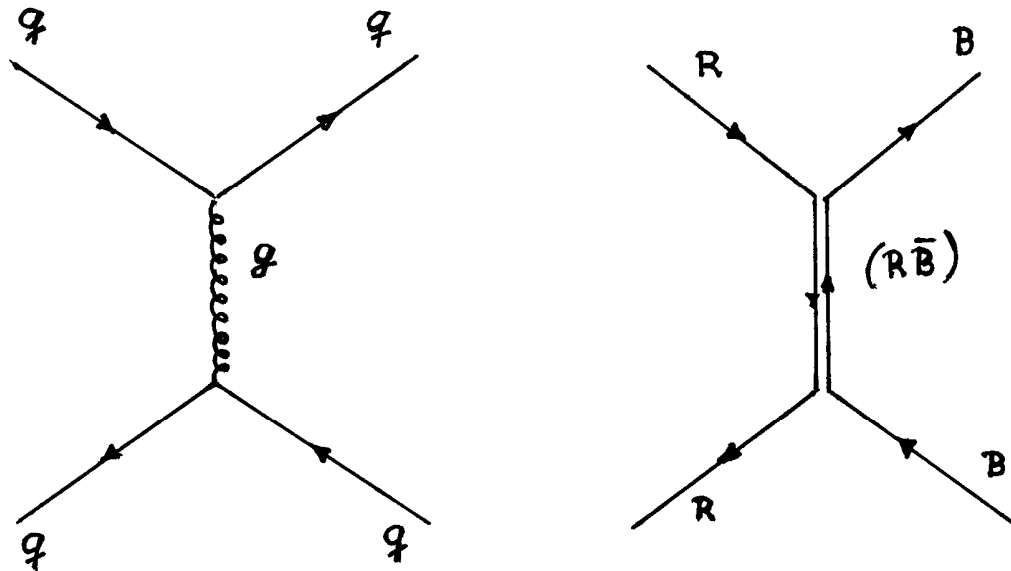


2. Silná interakcia – základné pojmy

ver: 10. 11. 2008

Silná interakcia medzi hadrónmi (kvarkami) je sprostredkovaná gluónmi.



Obr. 1 : Schéma silných interakcií - gluónova výmena; tok farebného náboja pri interakcii

Základné črty silných interakcií sú:

- Existujú 3 druhy farebného náboja, ktorý sa nazýva farba. Nábojové farebné stavy kvarku: $|R\rangle, |G\rangle, |B\rangle$
- Kvantami silného poľa sú gluóny g_i $i=1..8$

Základné charakteristiky gluónov:

- Gluóny sú bozóny (spin $S=1$), majú nulovú hmotnosť ($m_g=0$) a sú farebnými dvojkombináciami
- Z 9 možných dvojkombinácií je jedna singletná, t.j. nemá farebný náboj:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(R\bar{R} + G\bar{G} + B\bar{B}) \quad (2.1)$$

- Na rozdiel od fotónov gluóny môžu interagovať medzi sebou (majú farebný náboj).

2.1 Porovnanie väzbovej konštanty silnej a elektromagnetickej interakcie

Väzbová konštanta charakterizuje silu interakcie – napr. el.mag. interakcia ja charakterizovaná väzbovou konštantou:

$$\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi} \quad (2.2)$$

kde e je elementárny elektrický náboj.

Dôležitú informáciu o vzťahu silnej (α_s) a elektromagnetickej (α_{em}) väzbovej konštanty nám poskytujú rozpady (silné a elektromagnetické) nestabilných baryónov. V prípade platí, že pološírka rozpadu (Γ) súvisí s väzbovou konštantou vzťahom:

$$\Gamma \sim \alpha^2 \quad (2.3)$$

Uvažujme rozpad rezonancie $\Sigma^0(1385)$:

$$K^- + p \rightarrow \Sigma^0(1385) \rightarrow \Lambda + \pi^0$$

Táto rezonancia, v tomto prípade, je produkovaná Kp -interakciách a rozpadá sa v dôsledku silnej interakcie. Doba života tejto rezonancie je:

$$\tau = \hbar/\Gamma \approx 10^{-23} \text{ s} \quad (2.4)$$

Porovnajme uvedený rozpad s elektromagnetickým rozpadom $\Sigma^0(1192)$:

$$\Sigma^0(1192) \rightarrow \Lambda + \gamma \quad \text{s dobou života } \tau \approx 10^{-19} \text{ s.}$$

Výsledok porovnania:

$$\frac{\alpha_s}{\alpha_{em}} = \left(\frac{10^{-19}}{10^{-23}} \right)^{1/2} \approx 100 \quad (2.5)$$

Silná interakcia je skutočne silná!

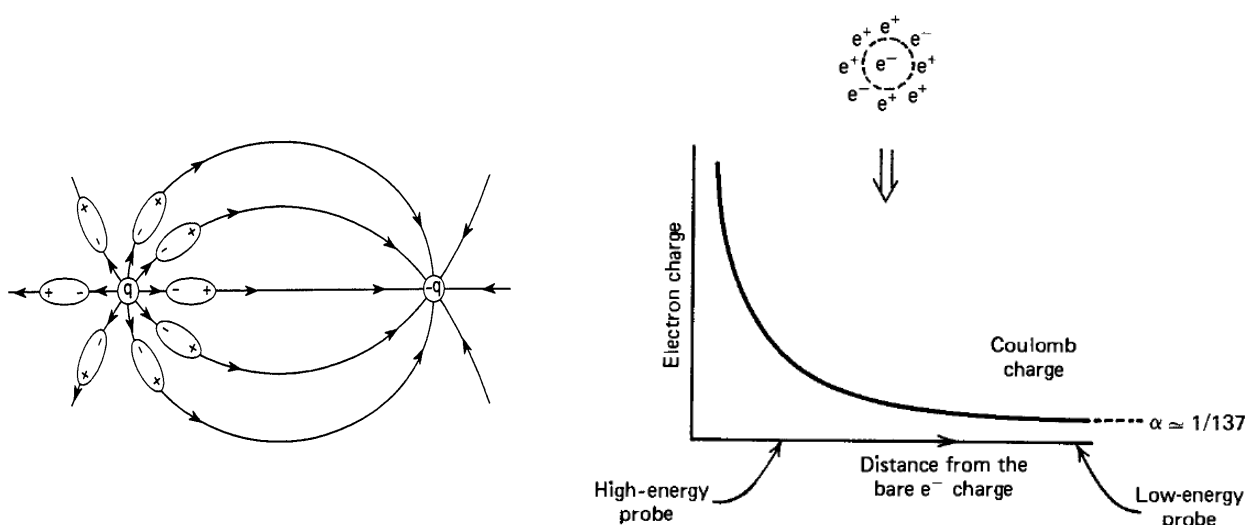
Poznámka. Pre porovnanie väzbových konštánt je dôležité, aby porovnavané procesy bežali s porovnateľnou prenesenou hybnosťou, lebo (uvidíme neskôr) väzbová konštanta závisí od

prenesenej hybnosti charakterizujúcej daný proces. V našom prípade je táto podmienka splnená, nakoľko kinetická energia odovzdaná časticiam výstupného kanálu je v uvažovaných procesoch prakticky rovnaká.

2.2 Globálne porovnanie silných a elektromagnetických interakcií

Elektromagnetická interakcia. Elektrický náboj vo vákuu (napr. elektrón) polarizuje vákuum podľa schémy:

$$e^- \leftrightarrow \text{virtuálny fotón } (\gamma) \leftrightarrow e^+e^-$$



Obr. 1: Polarizácia vákua (=tienenie náboja) - pokles väzbovej konštanty s rastúcou vzdialenosťou

Dôsledok polarizácie vákua:

Elektrón je obalený oblakom virtuálnych párov e^+e^- , ktorý tieni jeho náboj. Ak by sme umiestnili do poľa náboja elektrónu skúšobný jednotkový náboj, potom efektívny náboj elektrónu, získaný na základe Coulombovho zákona, je klesajúcou funkciou vzdialenosti (viď. Obr. 2).

Elementárny elektrický náboj vystupujúci v elektro=magnetickej väzbovej konštante ($\alpha_{em}=1/137$) je náboj meraný v Thompsonovom rozptyle, tade pri veľkých vzdialenostiach (pri malých prenesených hybnostiach)

Silná interakcia. Farebný náboj kvarku polarizuje vákuum podľa schémy ($q=\text{kvark}$, $g=\text{gluón}$):

$$q \leftrightarrow \text{virt. } g \leftrightarrow \begin{cases} \text{virt. } q\bar{q} \\ \text{virt. } gg \end{cases}$$

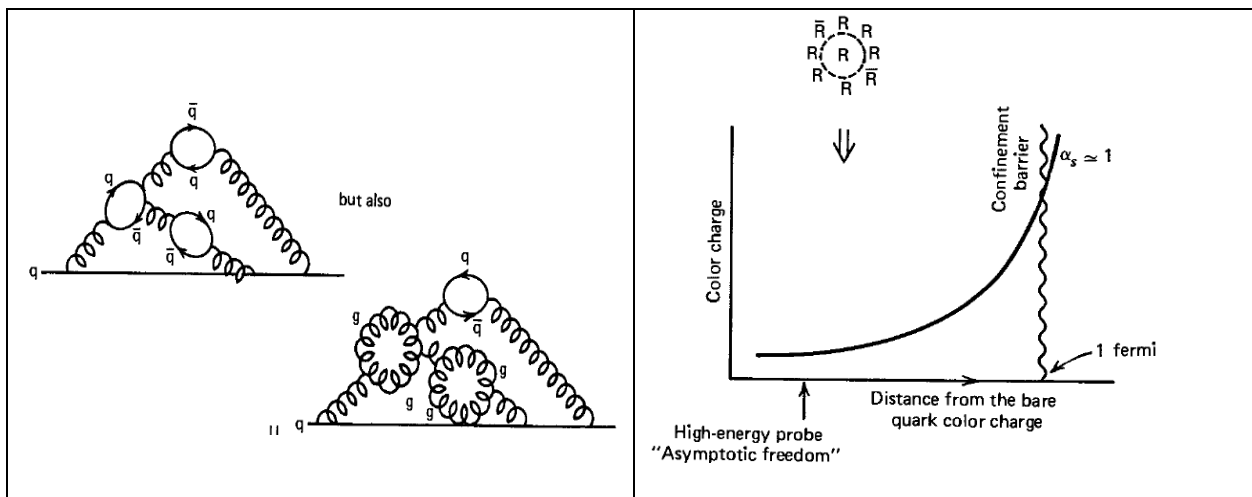
Rozdiel od elektrónu: virtuálny gluón môže vytvárať aj gg -páry, čo je dôsledok farebného náboja gluónu.

Dôsledok: v prípade silných interakcií, na rozdiel od interakcií elektromagnetických, dochádza k antitieneniu farebného náboja.

Dôvod: Oblak farebných $q\bar{q}$ - párov vedie k zväčšovaniu α_s na malých vzdialenostiach (ako v elektromag. prípade). Avšak oblak virtuálnych gluónov má za následok zmenšovanie α_s pri $r \rightarrow 0$.

Celkový efekt v systéme s 8 gluónmi a nie viac ako 16 vôňami (flavours) je, že väzbová konštant α_s sa zmenšuje ($\alpha_s \rightarrow 0$) na malých vzdialenostiach ($r \rightarrow 0$). Tento efekt sa nazýva asymptotická sloboda.

Uväznenie kvarkov (confinement).



Obr. 3: Uväznenie kvarkov: potenciál medzi interagujúcimi kvarkami rastie lineárne s ich vzdialenosťou.

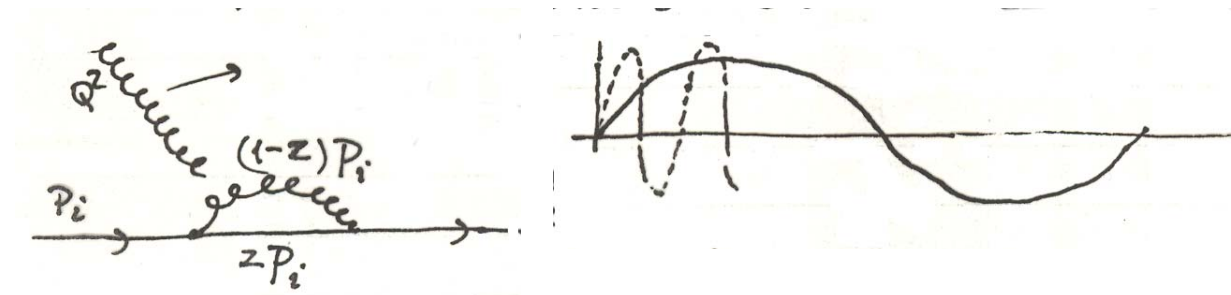
So vzrastajúcou vzdialenosťou interagujúcich kvarkov α_s rastie, pričom potenciál interagujúcich kvarkov je možné aproximovať potenciálom harmonického oscilátora $V(r) = \lambda r$ (viď. Obr. 3). Ak vzdialenosť kvarkov dosiahne úroveň 1 fm , potom nahromadená potenciálna energia je postaču-

júca na vytvorenie nového páru $q\bar{q}$ a namiesto jediného pôvodného páru máme páry dva. Tento jav sa nazýva uväznenie kvarkov (confinement).

Ako realizovať malé a veľké vzdialenosti. Uvažujme interakciu „bodových“ častíc sprostredkovanú nejakým intermediálnym bozónom (viď. Obr. 1). Základnou kinematickou charakteristikou takejto interakcie je prenesená 4-hybnosť, teda 4-hybnosť virtuálneho intermediálneho bozónu (q) resp. jeho obyčajná hybnosť (Q):

$$q^2 = (p - p')^2 = (k - k')^2 \quad \text{resp.} \quad Q^2 = -q^2 \quad (2.6)$$

kde p a k (p' a k') sú 4-hybnosti častíc vstupujúcich do interakcie (vystupujúcich z interakcie).



Avšak častici s hybnosťou Q ($=|\vec{Q}|$) vlnu s vlnovou dĺžkou $\lambda = 2\pi/Q$. Preto intermediálny bozón s veľkým Q „skanuje“ malé vzdialenosti, zatiaľčo intermediálny bozón s malým Q „skanuje“ veľké vzdialenosti.

2.3 Dôvody pre zavedenie farebného náboja.

Baryón Δ^{++} . Uvažujme baryón Δ^{++} (kvarková štruktúra: uuu). Je to častica (rezonancia) so spinom $3/2$ predstavujúca systém 3 identických fermiónov. Vlnová funkcia Δ^{++} musí byť preto Antisymetrická. Ak nepredpokladáme farebný náboj kvarku, potom pre vlnovú funkciu Δ^{++} platí:

$$\Psi(1,2,3) = \chi(\frac{3}{2}, s_z) \cdot \phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) \quad (2.7)$$

Spinová vlnová funkcia $\chi(\frac{3}{2}, s_z)$ je symetrická (pravidlá skladania spinov).

Keďže kvarky $u u u$ sú v základnom stave s orbitálnym momentom $L=0$, teda aj $\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$ musí byť symetrická. **Dôsledok:** aj úplná vlnová funkcia Ψ je symetrická, a teda baryón Δ^{++} nepodlieha Fermiho štatistike!

Riešenie problému: Kvarky majú doplnkový stupeň voľnosti – farebný náboj (farba) a časť vlnovej funkcie zodpovedajúcej tomuto stupňu voľnosti je antisymetrická.

Antisymetričnosť sa dá dosiahnuť tak, že farebný náboj môže nadobúdať (aspoň) 3 hodnoty ($Q_1=R, Q_2=G, Q_3=B$). Len v tom prípade pre 3 kvarky dokážeme vytvoriť úplne antisymetrickú farebnú komponentu vlnovej funkcie:

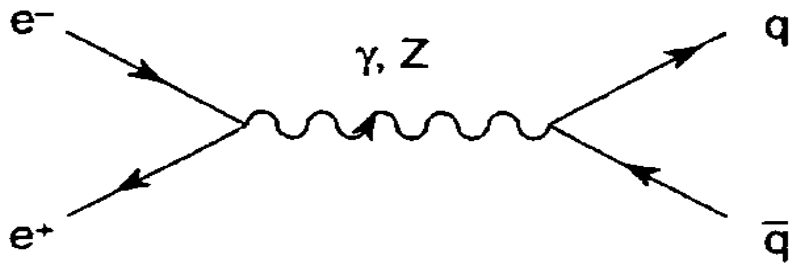
$$\Psi_c = \frac{1}{\sqrt{6}} \varepsilon^{ijk} \cdot Q_i Q_j Q_k \quad (2.8)$$

kde ε^{ijk} je jednotkový antisymetrický tenzor.

Hadrónová produkcia v e^+e^- -zväzkoch. Priamy test počtu farieb môže byť získaný z pomeru

$$R_{e^+e^-} \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \quad (2.9)$$

Hadrónová produkcia nastáva cez $e^+e^- \rightarrow \gamma^*, Z^* \rightarrow q\bar{q} \rightarrow \text{hadrons}$ (viď obr.4), keďže kvarky s

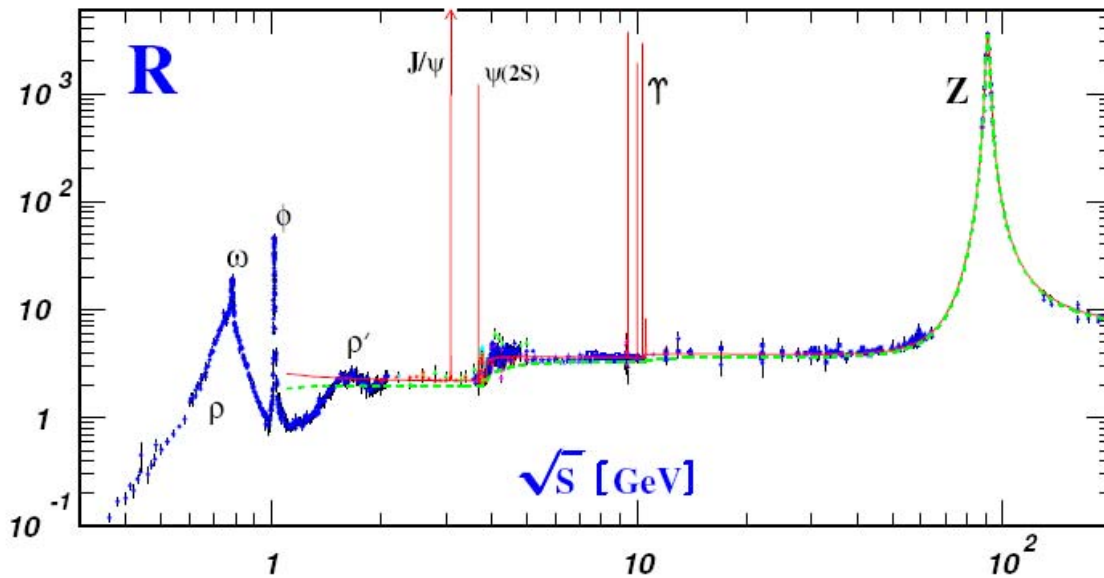


Obr. 4: Diagram pre $e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}$

pravdepodobnosťou 1 hadronizujú, suma cez všetky kvarky vo finálnom stave dá totálny inkluzívny účinný produkcie hadrónov. Pri energiách $\ll m_Z$ dominantnou je γ -výmena a pre pomer $R_{e^+e^-}$ platí:

$$R_{e^+e^-} \approx N_c \sum_{f=1}^{N_f} Q_f^2 = \begin{cases} \frac{2}{3} N_c = 2 & (N_f = 3 : u, d, s) \\ \frac{10}{9} N_c = \frac{10}{3} & (N_f = 4 : u, d, s, c) \\ \frac{11}{9} N_c = \frac{11}{3} & (N_f = 5 : u, d, s, c, b) \end{cases} \quad (2.10)$$

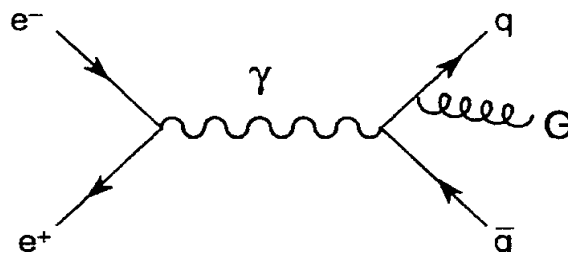
Treba si uvedomiť, že počet hadrónových (kvarkových kanálov) je $N_f \times N_C$, kde N_f je počet typov kvarkov efektívne produkovaných pri danej energii interakcie a N_C je počet farebných stavov kvarku. Meraný pomer je ukázaný na **obr.5**. Hoci jednoduchá formula 2.10 nemôže vysvetliť úplne komplikovanú štruktúru uvedeného pomeru dáva správne priemerné hodnoty účinného prierezu (mimo prahov produkcie jednotlivých kvarkov).



Obr.5:

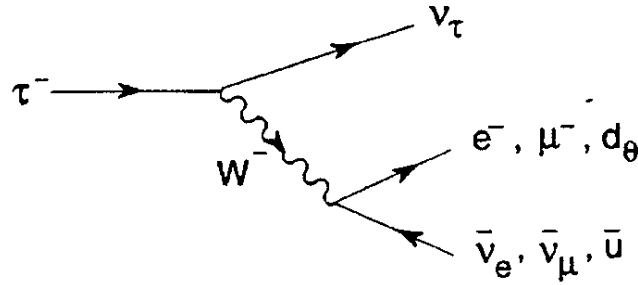
Experimentálna hodnota pomeru $R_{e^+e^-}$ v závislosti od energie e^+e^- -zväzku

Poznámka. Pre realistickejší výpočet pomer $R_{e^+e^-}$ je treba brať do úvahy aj vyššie rády poruchovej teórie, napr. Eventy typu $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$ (obr.6).



Obr.6: Vyžiarovanie brzdného gluónu, korekcie k procesu $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$.

Rozpad τ -leptónu. Tento rozpad predstavuje ďalší dôkaz pre $N_C=3$. Uvedený rozpad ide cez W-emisiu (obr. 7). Keďže väzba W-bozónu k slabým nabitým prúdom je rovnaká pre leptóny aj



Obr.7: Diagram rozpadu τ -leptónu

kvarky, máme $(2+N_C)$ rovnakých príspevkov (ak zanedbáme hmotnosti kvarkov a leptónov, a tiež vklad silných interakcií). Dva z nich predstavujú leptónové módy ($\tau^- \rightarrow \nu_\tau e^- \bar{\nu}_e$ a $\tau^- \rightarrow \nu_\tau \mu^- \bar{\nu}_\mu$) a ďalších N_C je spojených s $q\bar{q}$ -pármi rôznych farieb: $\tau^- \rightarrow \nu_\tau d_\theta u$ ($d_\theta = \cos \theta_c d + \sin \theta_c s$). V dôsledku toho sa očakáva:

$$B_{\tau \rightarrow l} \equiv Br(\tau^- \rightarrow \nu_\tau l^- \bar{\nu}_l) \approx \frac{1}{2 + N_C} = \frac{1}{5} = 20\% \quad (2.11)$$

$$R_\tau \equiv \frac{\Gamma(\tau^- \rightarrow \nu_\tau + \text{hadrons})}{\Gamma(\tau^- \rightarrow \nu_\tau e^- \bar{\nu}_e)}$$

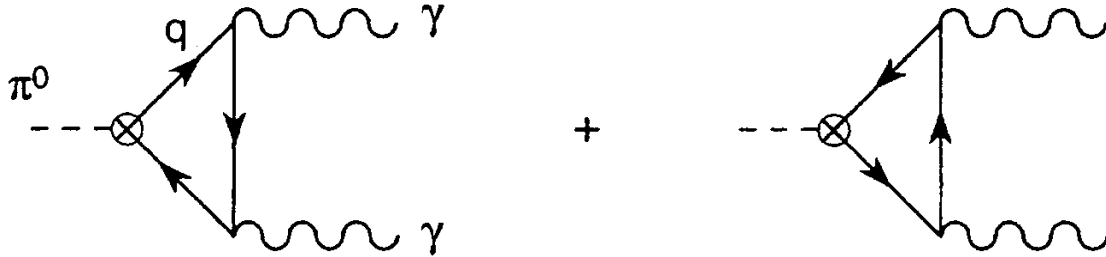
Pritom experiment dáva:

$$B_{\tau \rightarrow e} = (18.01 \pm 0.18)\%, \quad B_{\tau \rightarrow \mu} = (17.65 \pm 0.24)\% \quad (2.12)$$

$$R_\tau = (1 - B_{\tau \rightarrow e} - B_{\tau \rightarrow \mu}) / B_{\tau \rightarrow e} = 3.56 \pm 0.04$$

Čo je pomerne dobrá zhoda s hypotézou $N_C=3$.

Rozpad π^0 -mezónu. Rozpad $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ sa realizuje cez trojuholníkovú kvarkovú slučku (obr. 8).



Obr.8: Trojuholníkové kvarkové slučky generujúce rozpad $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$

Křížový vertex označuje axiálny prúd $A_\mu^3 \equiv (\bar{u}\gamma_\mu\gamma_5 u - \bar{d}\gamma_\mu\gamma_5 d)$. Priamy výpočet dáva:

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) = \left(\frac{N_c}{3}\right)^2 \frac{\alpha^2 m_\pi^3}{64\pi^3 f_\pi^2} = 7.73 \text{ eV} \quad (2.13)$$

kde $f_\pi = 92.4 \text{ MeV}$ je konštanta väzby π^0 k A_μ^3 , ktorá je získaná z rozpadu $\pi^- \rightarrow \mu^- \tilde{\nu}_\mu$ (predpokladajúc izospinovú symetriu). Súhlas s experimentálnou hodnotou $\Gamma = 7.7 \pm 0.6$ je pozoruhodný.

2.4 Silné interakcie a symetrie

Silné interakcie vykazujú celý rad symetrií:

- nábojová $SU(3)_c$ symetria
- symetria voči priestorovej inverzii
- symetria voči nábojovej konjugácii
- „flavorová“ $SU(n)_f$ ($n=3,4,\dots$) symetria.

Symetria Lagranžianu interakcie vedie k zákonom zachovania (*Noetherovej teóremy*). V prípade silných interakcií to vedie k zákonom zachovania:

- priestorovej a nábojovej parity
- izospinu, podivnosti, „charmu“, „beauty“, „true“
- v silných interakciách platia aj všeobecne platné zákony zachovania súvisiace s všeobecne platnými symetriami (zákon zachovania 4-hybnosti, momentu hybnosti a náboja).

Nábojová $SU(3)_c$ symetria. Z hľadiska silných interakcií táto symetria znamená, že farebné náboje sú ekvivalentné.

2.5 Grupa $SU(3)$.

Definícia. Je to grupa unitárnych unimodulárnych transformácií v 3-rozmernom komplexnom priestore:

$$\{U, \quad U^\dagger U = I \quad \text{a} \quad \det U = 1\} \quad (2.14)$$

Táto grupa má 8 voľných parametrov $n = N_c - N_u - N_d$:

- $N_c=18$ počet parametrov komplexnej matice 3×3 .
- $N_u=9$ je počet podmienok daných unitárnosťou

- $N_d=1$ je počet podmienok daných unimodularnosťou

Všeobecný tvar elementu $SU(3)$:

$$U = e^{i\varepsilon_\alpha L_\alpha} \quad \alpha = 1 \dots 8 \quad (2.15)$$

kde ε_α je 8 reálnych parametrov (uhly rotácií v C_3),

L_α - nezávislé hermitovské operátory ($L_\alpha^\dagger = L_\alpha$) s nulovou stopou, ktoré sú generátormi infinitezimálnych transformácií grupy $SU(3)$:

$$U = 1 + i\varepsilon_\alpha L_\alpha \quad (2.16)$$

Komutačné vzťahy pre L_α

$$[L_\alpha, L_\beta] = f_{\alpha\beta\gamma} L_\gamma \quad \gamma \equiv \text{sum. index} \quad (2.17)$$

kde $f_{\alpha\beta\gamma}$ sú antisymetrické štruktúrne koeficienty.

Dva z operátorov L_α sú diagonálne (nemôžu byť 3 lebo L_α majú nulovú stopu).

Gell-Mannov výber L_α pre 3-rozmernú reprezentáciu $SU(3)$:

$$L_\alpha = \frac{1}{2} \lambda_\alpha \quad (2.18)$$

kde

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Štruktúrne koeficienty:

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1 \quad f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = \frac{1}{2} \\ f_{458} &= f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ostatné } f_{\alpha\beta\gamma} = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Reprezentácie grupy SU(3).

Matematický prístup.

Reprezentáciou grupy G vo vektorovom (lineárnom) priestore X rozumieme zobrazenie T , ktoré každému elementu g grupy G priradí lineárny operátor $T(g)$ v priestore X , tak, že platí:

1. $T(e) = \underline{1}$, kde e je jednotka grupy G a $\underline{1}$ je jednotkový operátor v priestore X ,
2. $T(g_1 g_2) = T(g_1) \cdot T(g_2)$ pre všetky $g_1, g_2 \in G$

Priestor X je priestorom reprezentácie, operátory $T(g)$ sú operátormi reprezentácie. Ak $\dim(X) = n$, potom hovoríme o ***n-rozmernej reprezentácii*** (alebo reprezentácii n -tého stupňa). V takomto prípade elementy grupy G môžeme v priestore X reprezentovať maticami $n \times n$.

Grupa SU(3)_c. Fyzikálny význam.

Kvark sa môže nachádzať v 3 nábojových farebných stavoch :

$$|Q_1\rangle = |R\rangle \quad |Q_2\rangle = |G\rangle \quad |Q_3\rangle = |B\rangle \quad (2.21)$$

Farebný (nábojový) stav kvarku môžeme vyjadriť:

$$|q\rangle = q^1 |R\rangle + q^2 |G\rangle + q^3 |B\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$
$$|q^1|^2 + |q^2|^2 + |q^3|^2 = 1$$

kde q^i , $i=1..3$ sú súradnice vektora $|q\rangle$ v 3-rozmernom komplexnom priestore farebných stavov kvarku $\rightarrow$ jej interpretácia:

$|q^i|^2$ je pravdepodobnosť toho, že kvark sa nachádza vo farebnom stave $|Q_i\rangle$.

Priestor stavov farebného náboja kvarku $F_3(RGB)$, teda priestor s bázou $(|R\rangle, |G\rangle, |B\rangle)$ nad poľom komplexných čísel, je izomorfný s 3-rozmerným komplexným priestorom C_3 , teda stavy z $F_3(RGB)$ môžeme reprezentovať vektormi z C_3 :

$$F_3(RGB) \xrightarrow{\text{izomorfizmus}} C_3 \quad (2.23)$$

Pôsobenie grupy $SU(3)_c$ v $F_3(RGB)$. Z fyzikálneho hľadiska grupa $SU(3)_c$ mení farebnú kompozíciu farebného nábojového stavu (mení zastupenie farebných komponent nábojového stavu), teda transformuje farebný stav $|q\rangle \in F_3(RGB)$ na iný stav $|q'\rangle \in F_3(RGB)$:

$$|q\rangle = q^1|R\rangle + q^2|G\rangle + q^3|B\rangle \xrightarrow{g \in SU(3)_c} |q'\rangle = q'^1|R\rangle + q'^2|G\rangle + q'^3|B\rangle \quad (2.24)$$

V priestore C_3 (priestor reprezentácie) sa pôsobenie $g \in SU(3)_c$ prejaví nasledovne:

$$\begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix} \xrightarrow{g \in SU(3)} \begin{pmatrix} q'^1 \\ q'^2 \\ q'^3 \end{pmatrix} = \underbrace{\exp\left(\frac{i}{2} \varepsilon_\alpha \lambda^\alpha\right)}_{T(g)} \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Ak farebný stav kvarku vyjadrujeme trojicou komplexných čísel (q^1, q^2, q^3) , t.j. vektorom C_3 , potom elementy grupy $SU(3)_c$ budú v priestore reprezentácie (C_3) reprezentované komplexnými maticami 3×3 :

$$g \rightarrow T(g) = \exp\left(\frac{i}{2} \varepsilon_\alpha \cdot \lambda^\alpha\right), \quad \alpha = 1 \dots 8, \quad (2.26)$$

kde λ_α sú matice Gell-Manna. V takomto prípade hovoríme o tzv. **fundamentálnej reprezentácii grupy $SU(3)_c$ (3)**.

Zhrnutie. Pri fundamentálnej reprezentácii grupy $SU(3)_c$ je priestorom reprezentácie C_3 (teda 3-rozmerný farebný priestor $F_3(R, B, G)$) je reprezentovaný 3-rozmerným komplexným priestorom C_3) a elementy grupy $SU(3)_c$ sú reprezentované komplexnými maticami 3×3

Invariantnosť silných interakcií voči grupe $SU(3)_c$ znamená, že **dynamika farebných kvarkov** (účinné prierezy interakcií) **nezávisí od typu farebného náboja**.

Združená reprezentácia.

Uvažujme kvark v nejakom farebnom stave $|q\rangle$ a urobme nábojovú konjugáciu, t.j. zameňme časticu za antičasticu:

$$|q\rangle \xrightarrow{C} |\bar{q}\rangle = \bar{q}^1 |\bar{R}\rangle + \bar{q}^2 |\bar{G}\rangle + \bar{q}^3 |\bar{B}\rangle \xrightarrow{\text{izomorfizmus do } C_3} \begin{pmatrix} \bar{q}^1 \\ \bar{q}^2 \\ \bar{q}^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

$$q_i = \bar{q}^i \equiv (q^i)^*$$

kde $|\bar{R}\rangle, |\bar{G}\rangle, |\bar{B}\rangle$ sú anti-farby k farbám $|R\rangle, |G\rangle, |B\rangle$ a súradnice q_i budeme nazývať kovariantnými súradnicami farebného stavu (na rozdiel od q^i – kontravariantných súradníc). Kovariantné súradnice farebného stavu predstavujú sebou súradnice združeného (teda „anti-farebného“) stavu v priestore $F_3(\bar{R}, \bar{B}, \bar{G})$ (3-rozmerný farebný priestor s bazou $(|\bar{R}\rangle, |\bar{G}\rangle, |\bar{B}\rangle)$) nad poľom komplexných čísel - je duálnym priestorom k priestoru $F_3(R, B, G)$.

Je zrejmé, že v priestore C_3 , ktorý reprezentuje priestor „anti-farieb“ ($F_3(\bar{R}, \bar{B}, \bar{G})$) elementy grupy $SU(3)_c$ sú reprezentované C -maticami 3×3 :

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{g \in SU(3)} \begin{pmatrix} q'_1 \\ q'_2 \\ q'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q'^1 \\ q'^2 \\ q'^3 \end{pmatrix} = \underbrace{\exp\left(-\frac{i}{2} \varepsilon_\alpha \lambda^\alpha\right)}_{T(g)} \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

majúcimi vo všeobecnosti tvar:

$$\hat{U} = \exp\left(-\frac{i}{2} \varepsilon_\alpha \cdot \lambda^{\alpha*}\right) = U^* \quad (2.29)$$

$$q_i \rightarrow q'_i = (U^i_k)^* q_k = (U^+)_i^k q_k$$

V tomto prípade (pôsobenie $SU(3)_c$ v priestore farebných stavov antikvarku) hovoríme o **zdru-
ženej reprezentácii** ($\bar{3}$).

Reprezentácie vyšších dimenzií.

Z fundamentálnej (3) a združenej reprezentácie ($\bar{3}$) je možné vytvoriť reprezentácie vyšších rádov. Fyzikálne to znamená, že na báze farebných stavov kvarku a antikvarku vytvárame viac-komponentné farebné kombinácie.

Farebné dvoj-kombinácie vytvorené z farebných stavov kvarku ($|q\rangle$) a antikvarku ($|\bar{q}\rangle$), ktoré budeme označovať $|q\bar{q}\rangle$, predstavujú sebou vektor v C-priestore s bázou $|Q_i\rangle \otimes |\bar{Q}_j\rangle$ $i, j = 1...3$ a bi-farebný stav je reprezentovaný súradnicami $T_j^i = q^i \bar{q}_j$, t.j. tenzorom grupy SU(3). Priestor bi-farebnej kombinácie je tenzorovým súčinom jedno-komponentných farebných priestorov, pričom platí:

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8 \quad (2.30).$$

Rozloženie (2.30) znamená, že 9-rozmerný priestor bi-farebných stavov je možné rozložiť na dva v sebe uzavreté (z hľadiska grupy SU(3)) podpriestory: podpriestor farebných singletov a podpriestor farebných oktetov.

Báza SU(3) singletu: $\frac{1}{\sqrt{3}}(|R\bar{R}\rangle + |B\bar{B}\rangle + |G\bar{G}\rangle)$

Báza SU(3) oktetu: $\frac{1}{\sqrt{2}}(|R\bar{R}\rangle - |G\bar{G}\rangle) \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(|R\bar{R}\rangle + |G\bar{G}\rangle - 2|B\bar{B}\rangle)$

$$\begin{matrix} |R\bar{G}\rangle & |R\bar{B}\rangle & |G\bar{R}\rangle & |G\bar{B}\rangle & |B\bar{G}\rangle & |B\bar{R}\rangle \end{matrix}$$

V prírode je farebný singlet realizovaný **mezónmi** ($q\bar{q}$) a farebný oktet **gluónmi**.

Troj-farebné kombinácie. Farebný priestor je možné rozložiť nasledovne:

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$$

V prírode je realizovaná farebne-singletná kombinácia **baryónmi**.