

4.1 Relativistický popis častice

Relativistická častica je charakterizovaná:

- 4-vektorom polohy:

$$(ct, \vec{x}) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv x^\mu \equiv x \quad (1)$$

- 4-hybnosťou:

$$\left(\frac{E}{c}, \vec{x}\right) \equiv (p^0, p^1, p^2, p^3) \equiv p^\mu \equiv p \quad (2)$$

4-vektory x^μ a p^μ sú elementami 4-rozmerného pseudoeuklidovského priestoru M_4 (priestor súradníc a priestor hybností oddelene).

$\Rightarrow$ **Vlastnosti M_4**

- Skalárny súčin dvoch 4-vektorov (v M_4) $A^\mu = (A^0, \vec{A})$ a $B^\mu = (B^0, \vec{B})$:

$$A \cdot B = A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B} \quad (3)$$

- Rotácie v $M_4 \equiv$ Lorentzove transformácie $\Rightarrow$ vytvárajú Lorentzovu grupu (LG).

Skalárny súčin je invariantom LG

- Kovariantný 4-vektor: $A^\mu = (A^0, -\vec{A}) \rightarrow$ pre skalárny súčin:

$$A \cdot B = A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu \quad (4)$$

kde $g_{\mu\nu}$ je metrický tenzor:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

- Invarianty LG

$$\rightarrow \text{Interval:} \quad x_\mu x^\mu = c^2 t^2 - \vec{x}^2 \quad (6a)$$

$$\rightarrow \text{Hmotnostný štvorec:} \quad p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2 \quad (6b)$$

$$\rightarrow \text{Fáza:} \quad p_\mu x^\mu = Et - \vec{p} \cdot \vec{x} \quad (6c)$$

$$\text{Prirodzené jednotky:} \quad c = 1 \quad \hbar = 1 \quad (7)$$

$$\rightarrow \quad E^2 - \vec{p}^2 = m^2$$

$\rightarrow$ QM – priradenie operátorov:

$$\vec{p} \rightarrow -i\hbar \nabla \equiv -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \quad \text{a} \quad E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (8a)$$

v prirodzených jednotkách:

$$(E, \vec{p}) \rightarrow i \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \equiv i \partial^\mu \quad (8b)$$

$$\text{kovariantná forma operátora } \partial : \quad \partial_\mu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad (8c)$$

Skrátené zápisy:

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial t} & \equiv & \partial_t \equiv \partial_0 \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial x^3} & \equiv & \partial_z \equiv \partial_3 \end{array} \quad (9)$$

4.2 Kleinova - Gordonova rovnica. Pojem antičastice

Majme relativistickú časticu s hybnosťou $\vec{p}$, vzťah pre energiu je: $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$. Ak, ako v QM, zameníme E a $\vec{p}$ operátormi:

$$(E, \vec{p}) \rightarrow i(\partial_t, \nabla),$$

zo vzťahu pre energiu dostaneme Kleinovu-Gordonovu (KG) rovnicu:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi + \nabla^2 \varphi &= m^2 \varphi \\ \text{resp.} & \\ (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

kde

$\partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - \nabla^2$ je D'Alembertov operátor a $\varphi(t, \vec{r})$ je komplexná funkcia, od ktorej očakávame, že modul jej kvadrátu $|\varphi|^2$ bude hustotou pravdepodobnosti výskytu častice.

Riešenie pre voľnú časticu s hybnosťou $\vec{p}$:

$$\varphi(t, \vec{x}) = N \cdot e^{-i(Et - \vec{p}\vec{x})} = N \cdot e^{-ipx} \tag{2.2}$$

Kde

$E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ sú vlastné hodnoty energie,

N je normovacia konštanta: $|\varphi|^2 = |N|^2$ je hustota častíc.

Problém:

Čo sebou predstavuje riešenie $E = -\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} < 0$? Toto riešenie nemôžeme zavrhnúť, lebo systém stavov by nebol úplný.

Rovnica kontinuity (RK).

Z KG rovnice nasledovnou úpravou: $-\mathbf{i}\boldsymbol{\varphi}^* \cdot \mathbf{KG} + \mathbf{i}\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{KG}^*$

získavame:

$$\partial_t \underbrace{\left[\mathbf{i}(\boldsymbol{\varphi}^* \partial_t \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varphi} \partial_t \boldsymbol{\varphi}^*) \right]}_{\rho=j_0} + \nabla \cdot \underbrace{\left[\mathbf{i}(\boldsymbol{\varphi}^* \nabla \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varphi} \nabla \boldsymbol{\varphi}^*) \right]}_{\vec{j}} = 0 \quad (2.3a)$$

teda

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{j} \equiv \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (2.3b)$$

kde j^μ je 4-vektor prúdovej hustoty spojený s riešením $\boldsymbol{\varphi}(x)$.

Aplikácia RK na riešenie pre voľnú časticu s hybnosťou $\vec{p}$ dáva:

$$j^\mu = |N|^2 p^\mu \quad (2.4)$$

Pre riešenie so zápornou energiou ($E = -\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} (= p^0) < 0$) máme $\rho < 0$! Teda zápornú pravdepodobnosť výskytu. Predpokladajme, že častica má náboj $-e$ a urobme zámenu:

$$j^\mu \rightarrow -e \cdot j^\mu$$

V ďalšom budeme pod 4-vektorom prúdovej hustoty chápať:

$$j^\mu = -ie(\boldsymbol{\varphi}^* \partial^\mu \boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varphi} \partial^\mu \boldsymbol{\varphi}^*) \quad (2.5)$$

Interpretácia riešenia s $E < 0$ (Pauli a Weiskopf).

Pre voľnú časticu s hybnosťou $\vec{p}$ energiou $E (>0)$ a nábojom $-e$ máme:

$$j^\mu = -e|N|^2 p^\mu$$

pre antičasticu s hybnosťou $\vec{p}$ energiou $E (>0)$ a nábojom e máme:

$$j^\mu = e|N|^2 p^\mu = -e|N|^2 (-E, -\vec{p}) \quad (2.6)$$

Teda prúdová hustota pre antičasticu s daným $\vec{p}$ a $E (>0)$ sa zhoduje s prúdovou hustotou pre časticu s hybnosťou $-\vec{p}$ energiou $-E$.

Interpretácia: Emisia antičastice s energiou E nejakým systémom je ekvivalentná absorpcii častice s energiou $-E$ týmto systémom.

$$\begin{array}{ccc} \uparrow e^+ & \equiv & \downarrow e^- \\ | E > 0 & & | E < 0 \end{array} \quad \uparrow \text{čas} \quad (2.7)$$

Ináč: riešenie pre časticu s $E < 0$ pohybujúce sa v čase dozadu popisujú antičastice s $E > 0$ pohybujúce sa v čase dopredu.

Príčina: faktor e^{-iEt} popisujúci evolúciu stacionárneho stavu systému je možné písať nasledovne:

$$e^{-iEt} = e^{-i(-E)(-t)} \quad (2.8)$$

4.3 Nerelativistická poruchová teória

Uvažujme, v rámci QM-prístupu, voľnú časticu uzavretú v objeme. Stavy častice sú dané riešením Schrodingerovej rovnice (SchR):

$$\begin{aligned} H_0 \varphi_n &= E_n \varphi_n \quad \text{pritom} \quad \int \varphi_m^*(x) \cdot \varphi_n dx = \delta_{mn} \\ \varphi(x) &= \varphi(\vec{x}, t) = \varphi_n(\vec{x}) \cdot e^{-iE_n t} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ak častica sa pohybuje v nejakom silovom polí ($V(\vec{x}, t)$), potom je treba riešiť časovú SchR:

$$i \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} = (H_0 + V(x)) \psi(x) \quad (3.2)$$

Keďže $\{\varphi_n\}$ je úplný systém funkcií riešenie rovnice (3.2) je možné hľadať v tvare:

$$\psi(\vec{x}, t) = \sum_n a_n(t) \cdot \varphi_n(\vec{x}) \cdot e^{-iE_n t} \quad (3.3)$$

Aplikujúc $\int d^3\vec{x} \cdot \varphi_f^*(\vec{x}) \cdot$ na (3.2) a vyjadriac ψ prostredníctvom (3.3) dostávame:

$$\frac{da_f(t)}{dt} = -i \sum_n a_n(t) \cdot \int d^3\vec{x} \varphi_f^*(\vec{x}) V(\vec{x}, t) \varphi_n(\vec{x}) \cdot e^{-i(E_n - E_f)t} \quad (3.4)$$

kde

$a_n(t)$ je amplitúda pravdepodobnosti výskytu (v čase t) častice v stave $|n\rangle$,

$V_{fn} = \int d^3\vec{x} \varphi_f^*(\vec{x}) V(\vec{x}, t) \varphi_n(\vec{x})$ je pravdepodobnosť prechodu častice zo stavu $|n\rangle$ do stavu $|f\rangle$.

Predpoklad: potenciál je malý a zapne sa v $t=-T/2$ a vypne sa v $t=T/2$. Pritom častica bola v stave $|i\rangle (\equiv \varphi_i)$:

$$a_k(-T/2) = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases} \quad (3.5)$$

Ak potenciál je malý a trvá krátko, potom podmienky (3.5) sú, v 1. Priblížení, splnené počas celého intervalu $(-T/2, T/2)$ a zo (3.4) a (3.5) vyplýva:

$$\frac{da_f(t)}{dt} = -i \int d^3\vec{x} \varphi_f^*(\vec{x}) V(\vec{x}, t) \varphi_i(\vec{x}) \cdot e^{-i(E_i - E_f)t} \quad (3.6)$$

Preintegrujúc (3.6) a použijúc označenie $x \equiv (t, \vec{x})$ dostávame:

$$T_{fi} = a_f(T/2) = -i \int d^4x \varphi_f^*(x) V(x) \varphi_i(x) \quad (3.7)$$

Predpokladajme, že potenciál nezávisí od času $V(x) = V(\vec{x})$ potom

$$\begin{aligned} T_{fi} &= -i \underbrace{\int d^3\vec{x} \varphi_f^*(\vec{x}) V(x) \varphi_i(\vec{x})}_{V_{fi}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i(E_f - E_i)t}}_{2\pi\delta(E_f - E_i)} \\ &= 2\pi \cdot V_{fi} \cdot \delta(E_f - E_i) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Fermiho pravidlo. Pravdepodobnosť prechodu zo stavu $|i\rangle$ do stavu $|f\rangle$ je daná výrazom:

$$W_{fi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|T_{fi}|^2}{T} = 2\pi |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) \quad (3.9)$$

Vyššie rády poruchovej teórie

Ak v základnom vzťahu (3.4) pre $da_f(t)/dt$ vyjadríme $a_n(t)$ pomocou (3.7), teda použijeme preň prvé priblíženie, dostaneme:

$$\frac{da_f(t)}{dt} = \underbrace{(\dots)_1}_{1. \text{ priblíženie}} + (-i)^2 \sum_{n \neq i} V_{ni} \int_{-\infty}^t dt' e^{-i(E_i - E_n)t'} V_{fn} e^{-i(E_n - E_f)t} \quad (3.10)$$

Pre amplitúdu prechodu platí

$$T_{fi} = (\dots)_1 + (-i)^2 \sum_{n \neq i} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i(E_n - E_f)t} \cdot V_{fn} \cdot V_{ni} \cdot \int_{-\infty}^t dt' e^{-i(E_i - E_n)t'} \quad (3.11)$$

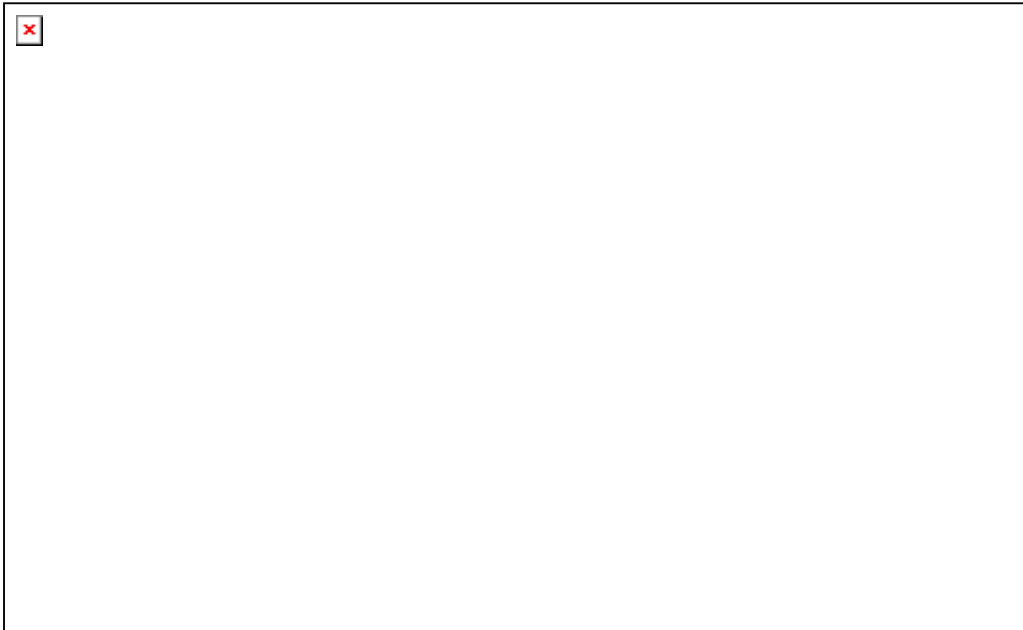
Aby integrál po dt' bol ohraničený (pri integrovaní do $-\infty$) dodáme do integrandu $e^{-t'}$, teda

$$\int_{-\infty}^t dt' \exp(-i(E_i - E_n)t') \rightarrow \int_{-\infty}^t dt' \exp(-i(E_i - E_n)t') = i \frac{\exp(-i(E_i - E_n + i\epsilon)t)}{E_i - E_n + i\epsilon} \quad (3.12)$$

Čo pre amplitúdu prechodu v druhom priblížení dáva:

$$T_{fi} = -2\pi i \left(V_{fi} + \sum_{n \neq i} V_{fn} \cdot \frac{1}{E_n - E + i\epsilon} \cdot V_{ni} \right) \delta(E_f - E_i) \quad (3.13)$$

Prechod zo stavu $|i\rangle$ do stavu $|f\rangle$ je možné zobrazit' graficky (vid'. Obr.1). Druhý člen poruchového radu je možné interpretovať nasledovne: na počiatku je častica v stave $|i\rangle$ v dôsledku prítomnosti poľa v určitom bode a čase preinteraguje a prejde do intermediálneho stavu $|n\rangle$, v ktorom sa šíri až do momentu, keď znovu preinteraguje a prejde do



finálneho stavu $|f\rangle$. Interpretácia prvého člena poruchového radu je priamočiara. Vyššie členy poruchovej teórie je možné získať tak, že do základného vzťahu (4) dosadíme za $a_n(t)$ jeho vyjadrenie v d rade poruchovej teórie.

Celkovo uvažovaný rozptyl je možné charakterizovať nasledovne:

- Každý interakčný vrchol je charakterizovaný faktorom typu V_{ni} .
- Intermediálny stav $|n\rangle$ popisuje propagátor $-\frac{1}{E_i - E_n + i\epsilon}$; pre virtuálny stav neplatí zákon zachovania energie ($E_n \neq E_i$).
- Zákon zachovania energie platí pre počiatkový a konečný stav $\rightarrow \delta(E_f - E_i)$.

Čo uvedená poruchová teória neobsahuje:

- Diagramy na Obr. 1 predstavujú rozptyl na statickom potenciále a nás zaujíma rozptyl častice v poli inej častice.
- Je treba popísať interakciu antičastíc.

4.4 Častica so spinom $S=0$ v elektromagnetickom poli.

Predpokladajme nasledovné:

- El.-mag. Pole je popísané 4-potenciálom: $A^\mu = (A^0, \vec{A})$
- častica má spin $S=0$, hybnosť $\vec{p}$ a náboj $-e$.

Z teórie el.-mag. poľa máme:

Pohyb nabitej častice v poli A^μ dostaneme z voľného pohybu zámenou:

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - eA^\mu, \text{ resp. v QM: } i\partial \rightarrow i\partial + eA^\mu.$$

Rovnica pre pohyb nabitej častice v poli A^μ :

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\varphi = \underbrace{(ie(\partial_\mu A^\mu + A_\mu \partial^\mu) + e^2 A^2)}_{-V}\varphi \quad (4.1)$$

Prvý rád poruchovej teórie:

- Častica je na počiatku v stave φ_i a v dôsledku interakcie prechádza do stavu φ_f ;
- v potenciáli V zanedbávame členy $\sim e^2$.

Pre element prechodu platí:

$$\begin{aligned} T_{fi} &= -i \int dx \varphi_f^*(x) V(x) \varphi_i(x) = i \int dx \varphi_f^*(x) (-ie) (\partial_\mu A^\mu + A_\mu \partial^\mu) \varphi_i(x) \\ &= -i \int (-ie) [\varphi_f^* \partial_\mu (A^\mu \varphi_i) + \varphi_f^* (\partial_\mu \varphi_i) A^\mu] dx \\ &= -i \int dx (-ie) \underbrace{[(\partial_\mu \varphi_f^*) \varphi_i + \varphi_f^* (\partial_\mu \varphi_i)]}_{j_\mu(x)} A^\mu \\ &= -i \int dx j_\mu(x) A^\mu(x) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Kde sme využili:

$$\partial_\mu (\varphi_f^* A^\mu \varphi_i) = (\partial_\mu \varphi_f^*) A^\mu \varphi_i + \varphi_f^* \partial_\mu (A^\mu \varphi_i) \quad \text{a fakt, že } \int dx \partial_\mu (\dots) = 0$$

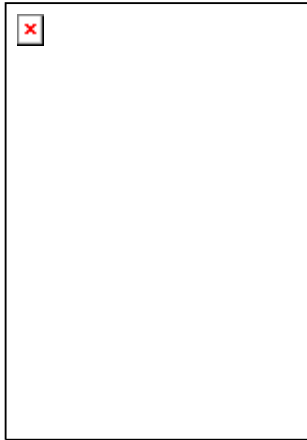
Tok spojený s prechodom častice zo stavu φ_i do stavu φ_f :

$$\begin{aligned} j_{\mu}^f(x) &= -ie[\varphi_f^*(x)\partial_{\mu}\varphi_i(x) - (\partial_{\mu}\varphi_f^*(x))\varphi_i(x)] \\ &= eN_i N_f (p_i + p_f)_{\mu} \cdot \exp(i(p_f - p_i)x) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Obr. 1: Grafické znázornenie amplitúdy T_{fi} :
častica so spinom 0 sa rozptyľuje na
statickom potenciáli A^{μ}



Rozptyl dvoch častíc so spinom 0.



Na problém rozptylu dvoch častíc so spinom 0 sa pozeráme tak, že prvá častica sa pohybuje v poli potenciálu druhej častice. Pritom pre potenciál $A_{(2)}^{\mu}$ generovaný druhou časticou platí:

$$\nabla^2 A_{(2)}^{\mu}(x) = j_{(2)}^{\mu}(x) \quad (4.4)$$

kde

$$j_{(2)}^{\mu}(x) = -eN_2 N_4 (p_B + p_D)^{\mu} e^{-i(p_D - p_B)x}$$

Riešenie je:

$$A_{(2)}^{\mu}(x) = -\frac{1}{q^2} j_{(2)}^{\mu}(x), \quad q = p_D - p_B \quad (4.5)$$

Pre amplitúdu rozptylu dvoch častíc so spinom 0 (napr. π a K) dostávame:

$$T_{fi} = -i \int d^4x j_{\mu}^{(1)}(x) A_{(2)}^{\mu}(x) = -i \int d^4x j_{\mu}^{(1)}(x) \frac{1}{q^2} j_{(2)}^{\mu}(x) = -i \int d^4x j_{(1)}^{\mu}(x) \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} j_{(2)}^{\nu}(x) \quad (4.6)$$

Kde

$j_{\mu}^{(1)}(x) (j_{\mu}^{(2)}(x))$ je prúdová hustota spojená s prechodom $\pi(K)$ z počiatočného do konečného stavu $(|i\rangle \rightarrow |f\rangle)$. Veličina $\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}$ je propagátor fotónu.

Ak vo vzťahu (8) vyjadríme $j_{\mu}^{(1)}(x) (j_{\mu}^{(2)}(x))$ pomocou (4) a preintegrujeme – dostaneme:

$$T_{fi} = -iN_1N_2N_3N_4 \cdot (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \cdot M_{fi} \quad (4.7)$$

kde

$$-iM_{fi} = ie(p_1 + p_3)^\mu \left(-i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \right) ie(p_2 + p_4)^\nu \quad (4.8)$$

Poznámka: Je dôležité si všimnúť symetriu medzi oboma časticami (π a K).

Normovanie. Jedno z možných normovaní je normovanie **na 1 časticu v objemu V**.

$$\phi(t, \vec{x}) = N \cdot e^{-ipx} = \frac{1}{\sqrt{2E \cdot V}} e^{-ipx} \quad (4.9)$$

Pritom sa často berie $V=1$. Použijúc rovnicu kontinuity dostávame:

$$\int_V d^3\vec{x} \rho = 1$$

4.5 Vzťah medzi účinným prierezom a amplitúdou prechodu

Vzťah experimentálne meranej veličiny (účinný prierez) a veličiny danej teóriou (amplitúdy prechodu):

$$d\sigma = \frac{W_{fi}}{|\vec{v}|\rho_1\rho_2} \cdot d\Omega \quad (5.1)$$

kde

- W_{fi} je pravdepodobnosť prechodu za jednotku času:

$$W_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{VT} = \frac{|M_{fi}|^2}{2E_1 2E_2 2E_3 2E_4 \cdot V^4} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \quad (5.2)$$

- Hustota počiatkových stavov:

$$|\vec{v}|\rho_1\rho_2 = \frac{|\vec{v}|}{V^2} \quad (5.3)$$

- $d\Omega$ je počet konečných stavov:

$$d\Omega = \frac{Vd^3p_3}{(2\pi)^3} \frac{Vd^3p_4}{(2\pi)^3} \quad (5.4)$$

Po dosadení (5.3-5) do (5.2) dostávame:

$$d\sigma = |M_{fi}|^2 \frac{1}{|\vec{v}|2E_1 2E_2} \cdot \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3p_4}{(2\pi)^3 2E_3} \cdot (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \quad (5.5)$$

Analogicky pre rýchlosť rozpadu ($A \rightarrow 1+2+\dots+n$):

$$d\Gamma = |M_{A \rightarrow 1 \dots n}|^2 \frac{1}{2E_A} \cdot \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \dots \frac{d^3p_n}{(2\pi)^3 2E_n} \cdot (2\pi)^4 \delta^4(p_A - p_1 - \dots - p_n) \quad (5.6)$$

Dvojčasticový fázový priestor.

V prípade 2-časticového finálneho stavu pre fázový priestor (po zahrnutí δ -funkcie) máme:

$$\begin{aligned} dLips_2(P) &= \frac{V d^3 p_3}{2E_3 (2\pi)^3} \frac{V d^3 p_4}{2E_4 (2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(P - p_3 - p_4) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} d^4 p_3 \delta(p_3^2 - m_3^2) \Theta(p_3^0) \cdot d^4 p_4 \delta(p_4^2 - m_4^2) \Theta(p_4^0) \cdot \delta^4(P - p_3 - p_4) \end{aligned} \quad (5.7)$$

kde m_3 a m_4 sú hmotnosti výstupných častíc a $P = p_1 + p_2$ je celková hybnosť vstupných častíc.

Využili sme pritom vlastnosti δ -funkcie:

$$\int g(x) \delta(f(x)) dx = \int g(x) \frac{1}{|f'(x)|} \delta\left(x - \sum_i x_i\right) \quad (5.8)$$

Kde x_i sú nulové body funkcie $f(x)$.

Keď preintegrujeme (5.7) cez $d^4 p_4$ následne cez dp_3^0 dostávame:

$$\begin{aligned} dLips_2(P) &= \frac{1}{(2\pi)^2} d^4 p_3 \delta(p_3^2 - m_3^2) \cdot \delta((P - p_3)^2 - m_4^2) \Theta(p_3^0) \\ &\xrightarrow{\int dp_3^0} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{d^3 p_3}{2E_3} \cdot \delta((P - p_3)^2 - m_4^2) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Ak prejdeme do sférických súradníc ($d^3 p_3 = p^2 dp d\cos\theta d\varphi$,

$p = \sqrt{(p_3^1)^2 + (p_3^2)^2 + (p_3^3)^2}$) nakoniec dostaneme:

$$\begin{aligned} dLips_2(P) &= \frac{1}{(2\pi)^2} d\cos\theta d\varphi dp \frac{p^2}{2\sqrt{p^2 + m_3^2}} \cdot \delta(M^2 - 2M\sqrt{p^2 - m_3^2} + m_3^2 - m_4^2) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} d\cos\theta d\varphi \frac{\lambda^{1/2}(M^2, m_3^2, m_4^2)}{8M^2} \end{aligned} \quad (5.9)$$

kde $\lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc$