Spinorové pole. Diracova rovnica ver *23. 11. 2007*

Diracova rovnica nám popisuje klasické spinorové pole, ktorého kvantami sú častice so spinom ½ . Analogicky ako fotóny sú kvantami elektromagnetického poľa. Takéto častice (s = ½) charakterizujeme :

$$\underbrace{x \equiv (t, \vec{x})}_{\text{4-vektor polohy}}, \quad \underbrace{p \equiv (E.\vec{p})}_{\text{4–hybnosť}}, \quad \underbrace{s_z \left(= -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)}_{\text{projekcia spinu}}, \quad \underbrace{e}_{\text{náboj}}$$

Forma DR:

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\Psi(x) = 0 \tag{1a}$$

$$i\partial_\mu \overline{\Psi}(x) \ \ \gamma^\mu + m\overline{\Psi}(x) = 0 \tag{1b}$$

kde

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \ \partial_\mu \equiv \left(\partial_t, \nabla\right) \tag{2}$$

$\Psi(x)$ je 4-komponentný spinor a $\overline{\Psi} = \Psi^+\gamma^0$ je dirakovský združený spinor a $\vec{\sigma} \equiv \left(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\right)$ sú Pauliho matice (viď. Doplnok A).

Prúdová hustota a rovnica kontinuity

Prúdová hustota pre časticu so spinom ½ a nábojom $-e$ je daná vzťahom:

$$j^\mu(x) = -e\overline{\Psi}(x)\,\gamma^\mu\,\Psi(x) \tag{3}$$

A platí preň rovnica kontinuity:

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \tag{4}$$

Riešenie DR pre voľnú časticu s hybnosťou $\vec{p}$ a spinom 1/2 je možné vyjadriť v tvare

$$\Psi_{\vec{p}}(x) = u(\vec{p})\exp(-ipx) \tag{5}$$

Kde 4-komponentný spinor $u(\vec{p})$ spĺňa rovnicu

$$\left(\gamma^\mu p_\mu - m\right)u(\vec{p}) = 0 \tag{6}$$

Pre voľnú časticu s hybnosťou $\vec{p}$ má rovnica (6) *4* nezávislé riešenia :

dve riešenia s $E > 0$ a dve riešenia s $E < 0$.

Riešenia s kladnou energiou ($p_0 = E > 0$):

$$u^{(i)}(\vec{p}) = N\begin{pmatrix} \varphi^{(i)} \\ \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\varphi^{(i)} \end{pmatrix} \quad i = 1,2 \qquad \varphi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varphi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7a}$$

Riešenia so zápornou energiou ($p_0 = -E < 0$):

$$u^{(i)}(\vec{p}) = N\begin{pmatrix} \dfrac{-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(i)} \\ \chi^{(i)} \end{pmatrix} \quad i = 3,4 \quad \chi^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \chi^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7b}$$

Kde N je normovacia konštanta (udáva hustotu častíc – viď. (3)).

Interpretácia riešenia: v stave s hybnosťou $\vec{p}$ nadobúda častica energiu $\pm E$ $\left(= \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}\right)$ ($-E$ zodpovedá antičastici), pritom v oboch prípadoch spin môže byť orientovaný v smere pohybu častice alebo proti nemu.

O riešeniach DR

Prvé 2 riešenia $u^{(1,2)}(\vec{p})e^{-ipx}$ popisujú elektrón s energiou E a hybnosťou $\vec{p}$.

Druhé 2 riešenia $u^{(3,4)}(\vec{p})e^{-ipx}$ so zápornou energiou zodpovedajú pozitrónu

Avšak pozitrón s energiou E a hybnosťou $\vec{p}$ bude popísaný riešením pre elektrón s $-E$ a $-\vec{p}$, preto platí

$$u^{(3,4)}(-\vec{p})e^{-i(-p)x} \equiv v^{(2,1)}(\vec{p})e^{ipx} \tag{7.1}$$

Zmena poradia indexov: *(3,4)* $\rightarrow$ *(2,1)* vyplýva z toho, že zmena smeru spinu a hybnosti nemení špirálnosť ($(1/2)\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p}$). Keďže zmena poradia indexov mení smer spinu, positrón bude mať oproti elektrónu nielen oačnú hybnosť ale aj spin (ak urobíme zámenu 3→2 a 4→1), teda oba budú mať rovnakým spôsobom definovanú špirálnosť (helicitu).

DR pre spinory $u(\vec{p})$ a $v(\vec{p})$ zjavne platí:

$$(\hat{p} - m)u(\vec{p}) = 0\ , \qquad (\hat{p} + m)v(\vec{p}) = 0 \quad \text{kde} \quad \hat{p} \equiv \gamma^{\mu} p_{\mu} \tag{7.2}$$

Normovanie spinorových funkcií má význam pre určenie vzťahu medzi účinným prierezom a amplitúdou procesu – zvyčajne sa robí na

- 1 časticu v jednotkovom objeme
- 2E častíc v jednotkovom objeme,

Čo vedie k následovným hodnotám normovacej konštanty N:

$$\int_{unitVol} \rho dV = \int \psi^{+}\psi \;\; dV = u^{+}u = \begin{cases} 2E \\ 1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} N = \sqrt{E+m} \\ N = \sqrt{E+m}\big/\sqrt{2E} \end{matrix} \tag{7.3}$$

Vzťahy úplnosti. Tieto vzťahy sú veľmi dôležité pri výpočte amplitúd:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1,2} u^{(s)}(p)\bar{u}^{(s)}(p) &= \hat{p}+m \\ \sum_{s=1,2} v^{(s)}(p)\bar{v}^{(s)}(p) &= \hat{p}-m \end{aligned} \tag{7.4}$$

Weylova reprezentácia γ-matíc a riešenia DR

Štruktúra γ-matíc v tejto reprezentáci je nasledovná:

$$\gamma^{0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{i} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \gamma^{5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{7.5}$$

Funkcia poľa si zapíšeme:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} \tag{7.6}$$

Kde ψ_R a ψ_L sú 2-komponentné spinory.

DR má v tomto prípade tvar:

$$\left(\gamma^{\mu} p_{\mu} - m\right)\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -m & p_0 + \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ p_0 - \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = 0, \tag{7.7}$$

a dáva nasledovné riešenia:

$$\psi_R = \frac{p_0 + \vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{m}\psi_L$$

$$\psi_L = \frac{p_0 - \vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{m}\psi_R$$

Zaujímavým je prípad: $m = 0$. V tomto prípade ψ_R a ψ_L sú vlastnými stavmi $\vec{\sigma}\cdot\vec{p}$ - operátora (úmerný projekcii spinu do smeru pohybu):

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,\psi_R = p_0\,\psi_R \quad \text{a} \quad \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,\psi_L = -p_0\,\psi_L$$

V relativistickom prípade platí***:***

$$\psi_R \text{ je veľké } (\psi_R \gg \psi_L) \text{ pre } \vec{\sigma}\cdot\vec{p} > 0 \text{ a } p_0 > 0$$

$$\psi_L \text{ je veľké } (\psi_L \gg \psi_R) \text{ pre } \vec{\sigma}\cdot\vec{p} < 0 \text{ a } p_0 > 0$$

V ultrarelativistickom prípade je $\vec{\sigma}\cdot\vec{p}/p_0 = \vec{\sigma}\cdot\widehat{\vec{p}}$ operátorom špirálnosti a indexy R a L sa vzťahujú na pravé resp. ľavé riešenie DR.

Interakcia častice so spinom ½ s el-mag poľom

Rovnicu pre pohyb častice so spinom ½ v el-mag poli dostaneme z Diracovej rovnice zámenou: $p^\mu \to p^\mu - QeA^\mu$, kde $\boldsymbol{Q}$ je náboj častice vyjadrený v elementárnych nábojoch (***e***) (pre elektrón $Q = -1$). Pre elektrón dostávame:

$$\left(\gamma_\mu p^\mu - m\right)\psi = \gamma^0 V\psi\,, \qquad \gamma^0 V = -e\gamma_\mu A^\mu \tag{8}$$

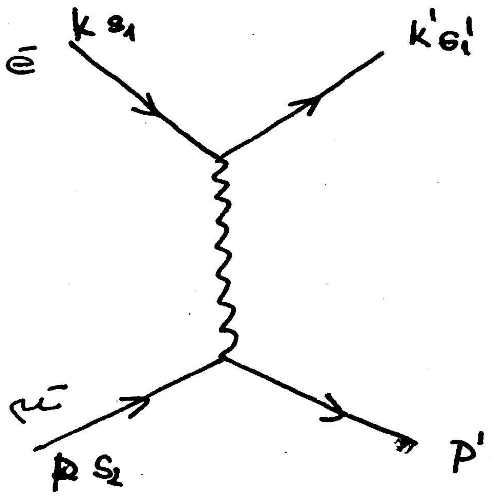
γ^0 je vydelené z $\boldsymbol{V}$, aby sme pri prechode k nerelativistickému prípadu dostali Schrodingerovu rovnicu. Rovnicu (8) riešime, analogicky ako v prípade častice so spinom 0, použitím poruchovej metódy.

Riešenie v prvom ráde poruchovej teórie predemonštrujeme na prípade $e\mu$-rozptylu.

Rozptyl $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$

Uvažujme rozptyl e^- s 4-hybnosťou $\boldsymbol{k}$ na mióne so 4-hybnosťou $\boldsymbol{p}$ (viď. *Obr. 1).* Poruchová metóda pre elemnet prechodu z počiatočného do do konečného stavu dáva: $T_{fi} = -i\int \psi_f^+(x)V(x)\psi_i\,dx = -i\int(-e)\overline{\psi}_f(x)\gamma_\mu\psi_i A^\mu(x)dx$.

Keď sa na problém dívame tak, že elektrón sa rozptyľuje v poli potenciálu vytvoreného miónom, pre $e\mu$-rozptylu dostávame:



Počiatočný stav: $\left|i\right\rangle = \left|ks_1, ps_2\right\rangle$

Konečný stav: $\left|f\right\rangle = \left|k's_1', p's_2'\right\rangle$

Amplitúda prechodu:

$$T_{fi} = -i\int j_\mu^{(e)}(x)\left(-\frac{1}{q^2}\right) j^\mu_{(m)}(x)\,dx = \\ = -i\left(2\pi\right)^4 \delta^{(4)}(k+p-k'-p')\;\; M_{fi} \tag{9}$$

kde

$$j^\mu_{(l)} = -\bar\psi_f \gamma^\mu \psi_i = -e\bar u_f \gamma^\mu u_i\, e^{i(p_f - p_i)x}$$

***Obr. 1*: Rozptyl elektrónu na mióne**

Pritom amplitúda M_{fi} (po dosadení výrazu pre prúd do (9)) je:

$$M_{fi} = -e^2 \bar u(k', s_1')\;\; \gamma^\mu u(k, s_1)\cdot \frac{1}{q^2}\cdot \bar u(p', s_2')\;\; \gamma_\mu u(p, s_2) \tag{10}$$

A budeme sa zaujímať o nepolarizovaný účinný prierez, t.j. budeme predpokladať, že v počiatočnom stave bude elektrón a mión s rovnakou pravdepodobnosťou nadobúdať obe hodnoty projekcie spinu a $\left|M_{fi}\right|^2$ spriemerujeme cez počiatočné a presumujeme cez konečné spinové stavy.

$$\overline{\left|M_{fi}\right|^2} = \frac{e^4}{q^4}\cdot L^{\mu\nu}_{(el)}\, L^{(mu)}_{\mu\nu} \tag{11}$$

Kde

$$L^{\mu\nu}_{(el)} = \frac{1}{2}\sum_{s_1 s_1'} \bar u(k', s_1')\gamma^\mu u(k, s_1)\cdot\left(\bar u(k', s_1')\gamma^\nu u(k, s_1)\right)^* \\ = \frac{1}{2} Tr\left[\left(\hat k' + m\right)\;\gamma^\mu\left(\hat k + m\right)\;\gamma^\nu\right]\;,\;\; \hat k = k_\alpha \gamma^\alpha \tag{12}$$

Skutočne platí $\left(u_i \equiv u(k, s_1) \text{ a } u_f \equiv u(k', s_1')\right)$, že

$$\left(\bar u_f \gamma^\nu u_i\right)^* = \left(u_f^+ \gamma^0 \gamma^\nu u_i\right)^+ = u_i^+ \gamma^{\nu+} \gamma^0 u_f = u_i^+ \gamma^0 \gamma^\nu u_f = \bar u_i \gamma^\nu u_f$$

lebo $\gamma^{\nu+}\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\nu$ (viď. vlastnosti γ-matíc) .

$$L^{\mu\nu}_{(el)}=\frac{1}{2}\sum_{s_1 s_1'}\bar{u}_f\gamma^\mu u_i\cdot\bar{u}_i\gamma^\nu u_f=\frac{1}{2}\sum_{s_1'}\bar{u}_f\gamma^\mu\left(\hat{k}+m\right)\gamma^\nu u_f=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{s_1'}\left(\bar{u}_f\right)_i\left(\gamma^\mu\left(\hat{k}+m\right)\gamma^\nu\right)_{ij}\left(u_f\right)_j=\frac{1}{2}\sum_{s_1'}\left(u_f\right)_j\left(\bar{u}_f\right)_i\left(\gamma^\mu\left(\hat{k}+m\right)\gamma^\nu\right)_{ij}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\hat{k}'+m\right)_{ji}\left(\gamma^\mu\left(\hat{k}+m\right)\gamma^\nu\right)_{ij}=\frac{1}{2}Tr\left[\left(\hat{k}'+m\right)\gamma^\mu\left(\hat{k}+m\right)\gamma^\nu\right]$$

(12)

Kde sme využili vzťahy úplností $\sum_{s_1=1,2}u_i\bar{u}_i=\hat{k}+m$.

Analogický výraz platí pre $L^{(mu)}_{\mu\nu}$. Pre výpočet amplitúdy procesu je treba vypočítať stopy súčinu γ-matíc.

$$L^{\mu\nu}_{(el)}=\frac{1}{2}Tr\left[\hat{k}'\gamma^\mu\hat{k}\gamma^\nu+m^2\gamma^\mu\gamma^\nu\right]=\frac{k'_\alpha k_\beta}{2}Tr\left[\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\nu\right]+\frac{m^2}{2}Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\nu\right]\qquad(13)$$

Využijúc vzťahy pre stopy γ-matíc (viď doplnok A):

$$Tr\left[\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\nu\right]=2\left(g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}-g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}+g^{\alpha\nu}g^{\mu\beta}\right),\qquad Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\nu\right]=2g^{\mu\nu}$$

dostávame:

$$L^{\mu\nu}_{(el)}=2\left(k'^\mu k^\nu-\left(k'\cdot k\right)g^{\mu\nu}+k'^\nu k^\mu+m^2g^{\mu\nu}\right)\qquad(14)$$

A úplne analogicky pre miónový tenzor dostávame

$$L^{\mu\nu}_{(muon)}=2\left(p'^\mu p^\nu-\left(p'\cdot p\right)g^{\mu\nu}+p'^\nu p^\mu+M^2g^{\mu\nu}\right)\qquad(15)$$

Čo na základe (11) vedie k výsledku

$$\overline{|M|^2}=\frac{8e^4}{q^4}\cdot\left[(k'\cdot p')(k\cdot p)+(k'\cdot p)(k\cdot p')-m^2(p'\cdot p)-M^2(k'\cdot k)+2m^2M^2\right]\qquad(16)$$

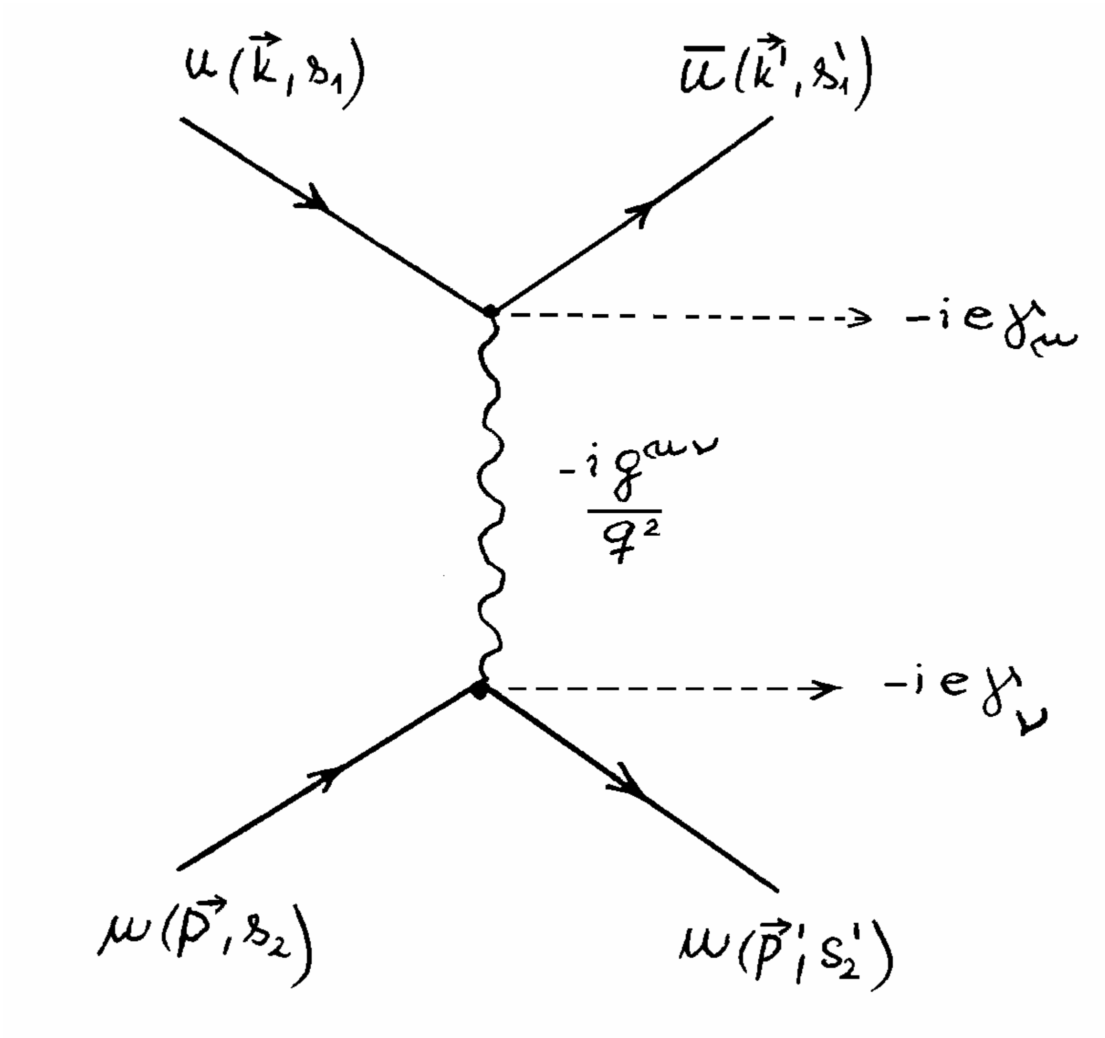
kde m (M) je hmotnosť elektrónu (miónu).

Recept na zostavenie amplitúdy

Amplitúdu eμ-rozptylu si môžeme vyjadriť nasledovne:

$$M_{fi}=-i\bar{u}(k',s_1')\left(-ie\gamma^\mu\right)u(k,s_1)\cdot\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\cdot\bar{u}(p',s_2')\left(-ie\gamma^\nu\right)u(p,s_2)\qquad(17)$$

Ak jednotlivým častiam diagramu $e\mu$-rozptylu priradíme faktory ako je ukázané na obr.2, potom amplitúdu procesu ľahko nájdeme.



Teda pre konštrukciu anplitúdy potrebujeme priradiť:

Interakčný vertex $\Rightarrow -ie\gamma_\mu$

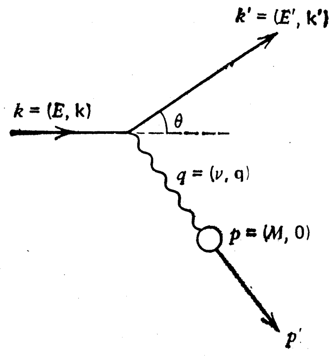
Vstupná častica so spinom ½ $\Rightarrow u(\vec{p}, s)$

Výstupná častica so spinom ½ $\Rightarrow \bar{u}(\vec{p}, s)$

Propagátor fotónu $\Rightarrow \dfrac{-ig^{\mu\nu}}{q^2}$

Rozptyl $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ v laboratórnej sústave

Uvažujme $e^-\mu^-$ rozptyl v laboratórnej sústave (LS) – ako je ukázané na *Obr.3*.



V LS je mión v kľude: $\boldsymbol{p} \equiv \left(\boldsymbol{M}, \vec{0}\right)$, poznáme pohybový stav incidentného elektrónu $\left(\boldsymbol{E}, \vec{\boldsymbol{k}}\right)$ a experimentálne meriame energiu výstupného elektrónu (***E'***) a uhol jeho odklonu od pôvodného smeru ($\boldsymbol{\theta}$).

Obr. 3: Rozptyl $\boldsymbol{e\mu}$ v laboratórnej sústave

Keď vychádzame zo všeobecnej formuly pre $\boldsymbol{e\mu}$-rozptyl (16) a zanedbáme členy úmerné $\boldsymbol{m^2}$ ***(*** *m*≡hmotnosť elektrónu ***)*** a použijeme priblíženie:

$$\boldsymbol{q}^2 \approx -2\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k'} = -2\boldsymbol{EE'}(1-\cos\boldsymbol{\theta}) = -4\boldsymbol{EE'} \cdot \sin^2\frac{\boldsymbol{\theta}}{2} \tag{18}$$

A pre kvadrát modulu amplitúdy $\boldsymbol{M_{fi}}$ máme:

$$\overline{\left|\boldsymbol{M}_{fi}\right|^2} = \frac{\mathbf{8}\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{q}^4} \mathbf{2}\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{EE'}\left\{\mathbf{cos}^2\frac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{2}} - \frac{\boldsymbol{q}^2}{\mathbf{2}\boldsymbol{M}^2}\mathbf{sin}^2\frac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{2}}\right\} \tag{19}$$

Pre účinný prierez dostávame:

$$\frac{\boldsymbol{d\sigma}}{\boldsymbol{dE'd\Omega}} = \frac{(2\boldsymbol{\alpha E'})^2}{\boldsymbol{q}^4}\left\{\mathbf{cos}^2\frac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{2}} - \frac{\boldsymbol{q}^2}{\mathbf{2}\boldsymbol{M}^2}\mathbf{sin}^2\frac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{2}}\right\} \cdot \boldsymbol{\delta}\left(\boldsymbol{\nu} + \frac{\boldsymbol{q}^2}{\mathbf{2}\boldsymbol{M}}\right) \tag{20}$$

kde $\boldsymbol{\alpha = e^2/4\pi}$, $\boldsymbol{\nu = E - E'}$.

Alebo keď nás zaujíma iba uhol rozptylu elektrónu :

$$\frac{\boldsymbol{d\sigma}}{\boldsymbol{d}\Omega} = \frac{\boldsymbol{\alpha}^2}{4\boldsymbol{E}^2\sin^4\frac{\boldsymbol{\theta}}{2}}\frac{\boldsymbol{E'}}{\boldsymbol{E}} \cdot \left\{\cos^2\frac{\boldsymbol{\theta}}{2} - \frac{\boldsymbol{q}^2}{2\boldsymbol{M}^2}\sin^2\frac{\boldsymbol{\theta}}{2}\right\} \tag{21}$$

Formuly pre účinný prierez bodového rozptylu (20) a (21) sú veľmi dôležité, pretože odklon od zákona bodového rozptylu poukazuje na prítomnosť nebodovej štruktúry, teda poskytuje informáciu o štruktúre.

Poznámka. Ak by sme namiesto miónu zobrali bodovú časticu so spinom 0, potom pre účinný prierez rozptylu elektrónu na uhol $\boldsymbol{\theta}$ je:

$$\frac{\boldsymbol{d\sigma}}{\boldsymbol{d\Omega}} = \frac{\boldsymbol{\alpha}^2}{\mathbf{4}\boldsymbol{E}^2\mathbf{sin}^4\frac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{2}}}\frac{\boldsymbol{E'}}{\boldsymbol{E}} \cdot \mathbf{cos}^2\frac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{2}} \tag{22}$$

z porovnania vzťahov (21) a (22) je zrejme, že člen obsahujúci $\sin^2 \theta/2$ v (21) vzniká v dôsledku rozptylu elektrónu na spine (magnetickom momente) miónu.

Porovnanie rozptylu častice so spinom 0 a ½

Amplitúda rozptylu je v v oboch prípadoch daná tým istým vzťahom:

$$T_{fi} = -i\int dx\, j^{fi}_{\mu}(x)\cdot A^{\mu}(x)$$

Rozdiel je v štrúktúre el-mag. toku. Častice so spinom 0 interagujú s el-mag poľom výlučne prostredníctvom náboja e a štruktúra toku (prechod častice zo stavu φ_i do stavu φ_f) je

$$j^{fi}_{\mu}(x) = eN_i N_f \left(p_i + p_f\right)_{\mu} \cdot e^{=iqx} \tag{23}$$

V prípade častice so spinom ½ je štrukúra toku nasledovná:

$$j^{fi}_{\mu}(x) = -e\bar{u}_f \gamma^{\mu} u_i\, e^{-iqx} \tag{24}$$

Použijúc Gordonov rozvoj:

$$-e\bar{u}_f \gamma^{\mu} u_i = -e\bar{u}_f \left(\frac{\left(p_f + p_i\right)^{\mu}}{2m} - i\frac{\sigma^{\mu\nu} q_{\nu}}{2m}\right) u_i \,, \qquad \sigma^{\mu\nu} = \tfrac{i}{2}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right) \tag{25}$$

vidíme, že v prípade častice so spinom ½ je okrem interakcie prostredníctvom náboja $\sim(p_f+p_i)$ je prítomná aj interakcia zodpovedajúca členu $\sigma^{\mu\nu}q_{\nu}$. Tento člen popisuje interakciu prostredníctvom magnetického momentu elektrónu:

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m}\vec{\sigma} = -g\frac{e}{2m}\vec{S} \tag{26}$$

Kde $\vec{S} = \vec{\sigma}/2$ a $g=2$ je gyromagnetický faktor.

Teda elektrón (častica so spinom 1/2) interaguje s el-mag poľom nielen prostredníctvom náboja ale tiež prostredníctvom magnetického momentu !

Poznámka. *Pre pochopenie toho, že druhý člen v (25) predstavuje interakciu magnetického momentu je si treba uvedomiť:*

- $q_0 = 0$ *v dôsledku zachovania energie* $(E_i = E_f)$
- *priestorová časť* $\sigma^{\mu\nu}$ *je* $\sigma^{ij} = \varepsilon^{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}$ $\quad i, j = 1,2,3$
- *brať len vrchné komponenty funkcii* $\psi^i(x)\left(= u^i(p)\exp(-ip_i x)\right)$ a $\psi^f(x)$.

Doplnok A: Algebra γ-matíc - základné vlastnosti γ-matíc

Fundamentálny anti-komutátor:

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad g^{\mu\nu} \equiv \text{metrický tenzor} \tag{A.1}$$

γ-matice v štandardnej reprezentácii:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.2}$$

Kde

$$\vec{\sigma} = (\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) \quad , \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

Z definície γ_5 resp. z explicitného vyjadrenia vyplýva:

$$\{\gamma_5,\gamma^\mu\} = 0, \qquad \gamma_5^2 = 1 \tag{A.4}$$

A tiež platí:

$$\gamma_5 \equiv \frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma, \qquad \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{párne kombinácie} \quad 0,1,2,3 \\ -1 & \text{nepárne kombinácie} \quad 0,1,2,3 \\ 0 & \text{2 a viac zhodých indexov} \end{cases} \tag{A.5}$$

Pri výpočte Fenmannovych diagramov je treba často využiť nasledovné ***vlastnosti stôp súčinov γ-matíc***:

$$\begin{aligned} Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu} \\ Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) &= 4\left[g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\right] \\ Tr(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) &= 4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \\ Tr(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu) &= 0 \end{aligned} \tag{A.6}$$

$$Tr\left(\underbrace{\gamma^\mu\cdots\gamma^\sigma}_{nepárné}\right) = 0$$

a platia vzťahy ($\hat{a} \equiv a_\mu\gamma^\mu$) :

$$\begin{aligned} \gamma_\mu\gamma^\mu &= 4 \\ \gamma_\mu\hat{a}\gamma^\mu &= -2\hat{a} \\ \gamma_\mu\hat{a}\hat{b}\gamma^\mu &= 4a\cdot b \\ \gamma_\mu\hat{a}\hat{b}\hat{c}\gamma^\mu &= -2\hat{c}\hat{b}\hat{a} \\ \hat{a}\hat{b} &= 2(ab) - \hat{b}\hat{a} \end{aligned} \tag{A.7}$$

Doplnok B: Gordonov rozvoj

Elektromagnetický prúd spôsobený prechodom elektrónu zo stavu $|i\rangle$ do stavu $|f\rangle$

Je možné rozložiť na 2 komponenty:

$$-e\bar{u}_f\gamma^\mu u_i = -e\bar{u}_f\left(\frac{(p_f+p_i)^\mu}{2m} - i\frac{\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\right)u_i \tag{B.1}$$

kde $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$.

Vychádzajme z

$$\begin{aligned} &i\bar{u}_f(\sigma^{\mu\nu}q_\nu)u_i = -\tfrac{1}{2}\bar{u}_f(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)u_i = \\ &\underbrace{-\tfrac{1}{2}\bar{u}_f\gamma^\mu\gamma^\nu(p_f)_\nu u_i}_{V_1} \quad \underbrace{+\tfrac{1}{2}\bar{u}_f\gamma^\nu\gamma^\mu(p_f)_\nu u_i}_{V_2} \\ &\underbrace{+\tfrac{1}{2}\bar{u}_f\gamma^\mu\gamma^\nu(p_i)_\nu u_i}_{V_3} \quad \underbrace{-\tfrac{1}{2}\bar{u}_f\gamma^\nu\gamma^\mu(p_i)_\nu u_i}_{V_4} \end{aligned} \tag{B.2}$$

Výrazy V_2 a V_3 môžeme ľahko upraviť použitím Diracovej rovnice:

$$V_2 = \tfrac{1}{2}\bar{u}_f\hat{p}_f\gamma^\mu u_i = \tfrac{1}{2}m\bar{u}_f\gamma^\mu u_i \qquad (\bar{u}_f\hat{p}_f = m\bar{u}_f) \tag{B.3}$$

$$V_3 = \tfrac{1}{2}\bar{u}_f\gamma^\mu\hat{p}_i u_i = \tfrac{1}{2}m\bar{u}_f\gamma^\mu u_i \qquad (\hat{p}_i u_i = m u_i) \tag{B.4}$$

Pre výrazy V_1 a V_4 je treba použiť : $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} V_1 &= -\tfrac{1}{2}\bar{u}_f(-\gamma^\nu\gamma^\mu + 2g^{\mu\nu})(p_f)_\nu u_i = \tfrac{1}{2}\bar{u}_f\gamma^\nu(p_f)_\nu\gamma^\mu u_i - \bar{u}_f p_f^\mu u_i = \\ &= \tfrac{1}{2}m\bar{u}_f\gamma^\mu u_i - \bar{u}_f p_f^\mu u_i \end{aligned} \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned} V_4 &= -\tfrac{1}{2}\bar{u}_f(-\gamma^\mu\gamma^\nu + 2g^{\mu\nu})(p_i)_\nu u_i = \tfrac{1}{2}\bar{u}_f\gamma^\mu(p_i)_\nu\gamma^\nu u_i - \bar{u}_f p_i^\mu u_i = \\ &= \tfrac{1}{2}m\bar{u}_f\gamma^\mu u_i - \bar{u}_f p_i^\mu u_i \end{aligned} \tag{B.6}$$

Teda pre B.2 na základe (A3-6) dostávame:

$$\bar{u}_f i\sigma^{\mu\nu}(p_f - p_i)_\nu = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 2m\bar{u}_f\gamma^\mu u_i - \bar{u}_f(p_i + p_f)^\mu u_i \tag{B.7}$$

Z čoho dostávame (B.1)

Elektromagnetické pole - fotón

Pohybovými rovnicami elmag poľa sú Maxwellové rovnice:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad \text{a} \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \tag{1}$$

Kde

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho} F_{\mu\nu}$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$F^{\mu\nu}$ je tenzor elmag poľa, $A^\mu = (\varphi, \vec{A})$ je 4-potenciál a $\tilde{F}^{\mu\nu}$ je duálny tenzor elmag poľa.

Explicitné vyjadrenie $F^{\mu\nu}$ vedie k Maxwellovej rovnici pre 4-potenciál:

$$\partial^\nu \partial_\nu A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = j^\mu \tag{3}$$

alebo

$$(g^{\mu\nu}\partial_\lambda \partial^\lambda - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu = j^\mu \tag{4}$$

Potenciál A^μ vykazuje kalibračnú slobodu, ktorá spočíva v tom, že fyzikálne sú merateľné intenzita elektrického a magnetického poľa, $\vec{E}$ resp. $\vec{B}$, ktoré sú definované nasledovne:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{5}$$

Veličiny $\vec{E}, \vec{B}$ sa nezmenia, ak urobíme kalibračnú transformáciu 4-potenciálu A^μ:

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi \tag{6}$$

kde χ je ľubovoľná funkcia diferencovateľná v 2. deriváciách. Teda celá trieda potenciálov vedie k tej istej konfigurácii elmag poľa. To nám umožňuje vybrať A^μ tak, že platí:

$$\partial^\nu \partial_\nu A^\mu = j^\mu \quad \text{pri} \quad \underbrace{\partial_\mu A^\mu = 0}_{\text{Lorentzova podmienka}} \tag{7}$$

Doplnková sloboda. Ak potenciál A^μ spĺňa Lorentzovu podmienku nie je touto podmienkou určený jednoznačne. Ak prejdeme k inému potenciálu

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda \tag{8}$$

kde Λ spĺňa podmienku $\partial_\mu \partial^\mu \Lambda = 0$. Je jasne, že ak A_μ spĺňa Lorentzovu podmienku, potom ju spĺňa aj A'_μ. Teda aj po splnení Lorentzovej podmienky je ešte voľnosť vo výbere pre popis elmag poľa.

Uvažujme teraz elektromagnetické pole bez nábojových zdrojov (voľné pole - voľný fotón)

$$\partial_\nu \partial^\nu A_\mu = 0 \tag{9}$$

Riešenie pre voľné pole je:

$$A^\mu(x) = \varepsilon^\mu(\vec{q}) \cdot \exp(-iqx) \tag{10}$$

kde ε je 4-vektor polarizácie a q *4*-hybnosť unášaná poľom (fotónom).

Dôležité momenty:

- Pre riešenie (10) z (9) vyplýva: $q^2 = 0$, čo odpovedá nulovej hmotnosti fotónu.
- Lorentzova podmienka ($q_\mu \varepsilon^\mu = 0$) a doplnková sloboda (8) umožňujú vybrať potenciál A^μ tak, že pre vektor polarizácie bude platiť: $\varepsilon_0 \equiv 0$ a teda platí:

$$\vec{\varepsilon} \cdot \vec{q} = 0 \tag{11}$$

Elektromagnetické pole je polarizované priečne a vektor polarizácie má dve nezávislé komponenty, t.j. báza vektora polarizácie obsahuje 2 elementy : $\vec{\varepsilon}^{(\lambda)}, \lambda = 1,2$.

Vo všeobecnosti je voľné elmag pole popísané potenciálom:

$$\vec{A}(x) = \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega}} \sum_{\lambda=1}^{2} \vec{\varepsilon}^{(\lambda)}(\vec{q}) \cdot \left(a_\lambda^{(-)}(\vec{q}) e^{-iqx} + a_\lambda^{(+)}(\vec{q}) e^{iqx} \right) \tag{12}$$

kde $q = (\omega, \vec{q})$ a dva členy v (…) zodpovedajú riešeniu s kladnou a zápornou energiou (frekvenciou): $q^0 = \pm\sqrt{\vec{q}^2} = \pm\omega$ (teda ω je definované kladne).

Energia elektromagnetického poľa

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{2}\int d^3\vec{x}\cdot\left(\vec{E}^2+\vec{B}^2\right) = \frac{1}{2}\int d^3\vec{x}\cdot\left[\left(\partial_t\vec{A}\right)^2+\left(\nabla\times\vec{A}\right)^2\right] =$$

$$= \sum_\lambda \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3}\cdot\omega\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{a_\lambda^{(-)}(\vec{q})a_\lambda^{(+)}(\vec{q})+a_\lambda^{(+)}(\vec{q})a_\lambda^{(-)}(\vec{q})}{2\omega}\right)}_{*} \qquad (14)$$

kde $\underbrace{\cdots}_{*}$ predstavuje hustotu fotónov (vĺn) s energiou (frekvenciou) $\omega = |\vec{q}|$ v systéme elektromagnetického poľa.

Záver. Elektromagnetické pole je možné interpretovať:

- Prostredníctvom $\vec{E}$ a $\vec{B}$ (intenzita elektrického a magnetického poľa)
- Ako systém fotónov (kvánt poľa).