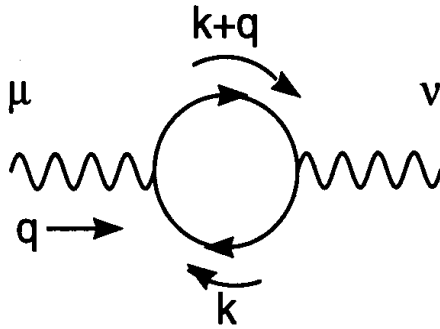


Feynmanove pravidlá

Základné pravidlá pre stanovenie maticových elementov použitím Feynmannovych diagramov sú sumarizované nižšie:

External lines		
Bozon S=0 (in,out)		1
Fernion S=1/2 (in, out)		$u, \bar{u}$
Antifernion S=1/2 (in,out)		$\bar{v}, v$
		e_μ, e_μ^*
Internal lines - propagators (rule + i ε)		
Bozon S=0		$\frac{i}{p^2 - m^2}$
Fernion S=1/2		$\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}$
Bozon S=1 (mass > 0)		$\frac{-i(g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / M^2)}{p^2 - M^2}$
Photon S=1 (Feynmann cal.)		$-\frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2}$
Vertex factors		
photon - spin 0 (charge -e)		$ie(p + p')^\mu$
photon - spin 1/2 (charge -e)		$ie\gamma^\mu$

Slučky v diagramoch



V prípade fermiónovej slučky je treba

- priradiť faktor (-1) ,
- urobiť stopu zodpovedajúcich γ -mátíc
- a integrovať cez hybnosť cirkulujúcu v slučke:

$$F.S. = (-1) \int d^4 k \ (ie\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \cdot \frac{i(\hat{k} + m)_{\beta\lambda}}{k^2 - m^2} \cdot (ie\gamma^\nu)_{\lambda\delta} \cdot \frac{i(\hat{q} + \hat{k} + m)_{\delta\alpha}}{(q+k)^2 - m^2}$$

$$= (-1)i^2(ie)^2 \int d^4 k \cdot \frac{\text{Tr}(\gamma^\mu(\hat{k} + m)\gamma^\nu(\hat{q} + \hat{k} + m))}{(k^2 - m^2)(q+k)^2 - m^2}$$

kde

$$\hat{k} = k_\mu \gamma^\mu, \quad \hat{q} = q_\mu \gamma^\mu$$

Opakujúce sa indexy sú sumačnými indexami.

Poznámka. Hybnosť v slučke je ohraničená iba zákonom zachovania 4-hybnosti. Keďže $q = (q - k) + k$ platí pre všetky k , musíme integrovať cez všetky možné k .

Vzťahy úplnosti

Uvažujme časticu so spinom 1, hmotnosťou m a vektorom polarizácie ϵ^μ pre spinovú sumu platí:

$$\sum_s \epsilon^\mu \epsilon^{*\nu} = -g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu / m^2$$

O kvantovaní polí

Predpokladajme, že fyzikálny systém je tvorený poľom $\Psi(x)$ alebo systémom polí. Potom aplikácia variačného princípu na účinok systému ($S = \int L dt$, $\delta S = 0$, $L \equiv$ Lagranžián systému) vedie k Lagranžovým rovniciam (LR):

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_\mu \Psi)} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial \Psi} = 0 \quad (1)$$

kde Λ je hustota Lagranžiánu.

Základné polia, s ktorými sa stretávame vo fyzike elementárnych častíc.

- Komplexné skalárne pole :

$$\Lambda = \partial_\mu \varphi^* \cdot \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi$$

LR:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi = 0, \quad (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi^* = 0$$

- Spinorové (Diracovo) pole:

$$\Lambda = \frac{i}{2} [\bar{\Psi} \gamma^\mu \cdot \partial_\mu \Psi - (\partial_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi] - m \bar{\Psi} \Psi$$

LR:

$$(i \gamma_\mu \partial^\mu - m) \Psi = 0, \quad \bar{\Psi} (i \gamma_\mu \partial^\mu + m) = 0$$

- Elektromagnetické pole s vonkajším zdrojom:

$$\Lambda = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu j^\mu$$

LR:

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\mu (\partial^\nu A_\nu) = j^\mu$$

Lagrangeova rovnica pre:

- Skalárne pole ($\equiv$ KG rovnica) popisuje častice so spinom 0, tj. kvantá skalárneho poľa,
- spinorové pole ($\equiv$ Diracova rovnica) popisuje častice so spinom 1/2, tj. kvantá spinorového poľa,
- elektromagnetické pole ($\equiv$ Maxwelllova rovnica) popisuje fotóny (spin 1, $m=0$), tj. kvantá elektromagnetického poľa.

Skalárne a spinorové pole nemajú klasický analóg – iba kvantový, zatiaľ čo el-mag. pole má ako klasickú (intenzita elektrického a magnetického poľa), tak aj kvantovú interpretáciu – systém fotónov.

Vyššie uvedené Lagrangeove rovnice (KGR, DR, MR) sú rovnicami klasických polí. V aplikácii na jednu časticu nám dávajú kvantovú mechaniku:

- bozónu so spinom 0 (KGR)
- fermiónu so spinom 1 (DR)
- fotónu (spin 1, $m=0$) (MR)

Z porovnaní štruktúry LR systému polí (1) s LR klasického systému s N stupňami voľnosti

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1 \dots N$$

vyplýva:

$$q \rightarrow \Psi \quad \text{a} \quad t \rightarrow x^\mu$$

- zovšeobecnená súradnica poľného systému je $\Psi(x)$;
- zovšeobecnená hybnosť poľného systému je $\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi)}$.

QM: kvantovanie spočívajúce v zámene fyzikálnych veličín príslušnými operátormi

$$q \rightarrow \hat{q} = q \quad \text{a} \quad p \rightarrow \hat{p} = -i\hbar\nabla$$

kde

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$$

Operátory kvantovomechanických veličín pôsobia v Hilbertovom priestore, ktorý reprezentuje kvantové stavy fyzikálneho systému.

QFT: kvantovanie polí - platí analogická schéma:

$$\Psi(x) \rightarrow \hat{\Psi}(x) \quad \text{a} \quad \pi(x) \rightarrow \hat{\pi}(x)$$

kde $\hat{\Psi}(x)$ a $\hat{\pi}(x)$ sú operátory spĺňajúce komutačné vzťahy:

$$\begin{aligned} [\hat{\Psi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{x}', t)] &= i\delta(\vec{x} - \vec{x}') \\ [\hat{\Psi}(\vec{x}, t), \hat{\Psi}(\vec{x}', t)] &= 0 \\ [\hat{\pi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{x}', t)] &= 0 \end{aligned}$$

$\hat{\Psi}$ -operátory sa dajú vyjadriť prostredníctvom anihilačných a kreačných operátorov.

Na základe $\hat{\Psi}$ -operátorov resp. kreačných a anihilačných operátorov je možné skonštruovať Hamiltonián systému polí, ktorý pôsobí v tzv. Fockovom priestore (viď. ďalej).

Kvantovanie komplexného skalárneho poľa.

Ak náš fyzikálny systém je tvorený komplexným skalárnym poľom potom hustota jeho Lagranžiánu je

$$L = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \quad (2.14)$$

Kde na ϕ a ϕ^* sa môžeme dívať ako na nezávislé funkcie poľa a dve kanonicky združené k nim polia sú:

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}^*, \quad \pi^* = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^*} = \dot{\phi} \quad (2.15)$$

V konečnom dôsledku to vedie k Hamiltoniánu:

$$H = \int d^3x (\pi \partial_0 \phi + \pi^* \partial_0 \phi^* - L) = \int d^3x (\pi^* \pi + \nabla \phi^* \cdot \nabla \phi + m^2 \phi^* \phi) \quad (2.16)$$

Kvantovanie poľa realizujeme zámenou polí ϕ, ϕ^*, π, π^* operátormi poľa: $\hat{\phi}, \hat{\phi}^\dagger, \hat{\pi}, \hat{\pi}^\dagger$, od ktorých žiadame aby spĺňali v rovnakom čase nasledovné komutačné vzťahy:

$$[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{x}', t)] = [\hat{\phi}^\dagger(\vec{x}, t), \hat{\pi}^\dagger(\vec{x}', t)] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.17)$$

Lagrangeové rovnice pre komplexné skalárne pole sú Klein-Gordonové rovnice (KGE).

Vo všeobecnosti riešenie KGR je superpozíciou rovinných vln:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E}} [a^{(-)}(\vec{p}) e^{-ipx} + a^{(+)}(\vec{p}) e^{ipx}], \quad \begin{aligned} x &\equiv (x^0, \vec{x}) \\ p &\equiv (E, \vec{p}) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Pri kvantovaní koeficienty $a^{(-)}(\vec{p})$ a $a^{(+)}(\vec{p})$ budú nahradené operátormi $\hat{a}_{\vec{p}}$ a $\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger$ a vo

funkcii ϕ^* koeficienty $(a^{(-)}(\vec{p}))^*$ a $(a^{(+)}(\vec{p}))^*$ operátormi $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$ a $\hat{b}_{\vec{p}}$. Je možné ľahko

ukázať, že aby splnili komutačné vzťahy (2.17) operátory $\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{b}_{\vec{p}}$ a $\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger$ musia splňať:

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger] = [\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}'}^\dagger] = i\delta(\vec{p} - \vec{p}') \quad (2.19)$$

Všetky ostatné komutátory sú rovné 0. Operátory $\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}}$ sa nazývajú anihilačnými operátormi a $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger$ kreačnými operátormi častice resp. antičastice. Použitím anihilačných a kreačných operátorov môžeme vyjadriť Hamiltonián (2.16) prostredníctvom nich. Fakt, že $\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{b}_{\vec{p}}$ a $\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger$ sú operátory, a vo všeobecnosti nekomutujú, znamená, že poradie týchto operátorov je dôležité (zatiaľčo to nebolo tak v prípade zodpovedajúcich klasických veličín). Zoberieme Hamiltonián (2.16) a nahradíme klasické polia operátormi polí a tie si potom vyjadríme prostredníctvom anihilačným a kreačným operatorom tak napokon dostávame:

$$\hat{H} = \int d^3\vec{p} \omega_{\vec{p}} (\hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}}) = \int d^3\vec{p} \omega_{\vec{p}} (\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}} + 1) \quad (2.20)$$

Fakt, že v (2.20) po prekomutovaní operátorov dostaneme pod integrálom 1 je nepríjemné, pretože po integrácii dostávame nekonečno (nekonečná energia vákua).

Avšak v teórii táto 1 pod integrálom je ignorovaná, pretože tzv. Hamiltonian s normálnym súčinom operátorov sa používa ako Hamiltonián fyzikálneho systému:

$$\hat{H} =: \int d^3 \vec{p} \omega_{\vec{p}} \left(\hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}} \right) : = \int d^3 \vec{p} \omega_{\vec{p}} \left(\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}} \right) \quad (2.21)$$

Kde : -- : je symbol normálny súčin (všetky kreačné operátory sú naľavo od anihilačných operátorov) a $\omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

Ako bude ukázané neskôr Hamiltonián $\hat{H}$ pôsobí vo Fokovom priestore a operátor $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}$ je operátor počtu častíc hybnosťou $\vec{p}$.

Spinorové pole

$$\Psi(x) = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E}} \sum_{\lambda} \left(a_{\lambda}^{(+)}(\vec{p}) \cdot u_{\lambda}(\vec{p}) \cdot e^{-ipx} + a_{\lambda}^{(-)}(\vec{p}) \cdot v_{\lambda}(\vec{p}) \cdot e^{ipx} \right)$$

$$\bar{\Psi}(x) = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E}} \sum_{\lambda} \left((a_{\lambda}^{(+)}(\vec{p}))^* \cdot \bar{u}_{\lambda}(\vec{p}) \cdot e^{ipx} + (a_{\lambda}^{(-)}(\vec{p}))^* \cdot v_{\lambda}(\vec{p}) \cdot e^{-ipx} \right)$$

Lagranžián spinorového poľa:

$$L = \frac{i}{2} \left[\bar{\Psi} \gamma^{\mu} (\partial_{\mu} \Psi) - \partial_{\mu} \bar{\Psi} \gamma^{\mu} \Psi \right] - m \bar{\Psi} \Psi$$

Kanonická hybnosť:

$$\pi(x) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}(x)} = i \Psi^+(x)$$

Hamiltonián:

$$H = \int d^3 x \cdot \pi \cdot \dot{\Psi} - L = \int d^3 x \cdot \Psi^+ i \frac{\partial}{\partial t} \Psi$$

Vo všeobecnosti pre 4-hybnosť poľa máme:

$$P_{\mu} = i \int d^3 x \cdot \bar{\Psi} \gamma^0 \partial_{\mu} \Psi$$

A pre jeho náboj:

$$Q = i \int d^3 x \cdot \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi$$

Hamiltonián poľa po vyjadrení cez funkcie poľa:

$$H = \int d^3 p \cdot E \cdot \sum_{\lambda} \left[(a_{\lambda}^{(+)}(\vec{p}))^* a_{\lambda}^{(+)}(\vec{p}) - (a_{\lambda}^{(-)}(\vec{p}))^* a_{\lambda}^{(-)}(\vec{p}) \right]$$

Náboj poľa po vyjadrení cez funkcie poľa:

$$Q = \int d^3 p \cdot \sum_{\lambda} \left[(a_{\lambda}^{(+)}(\vec{p}))^* a_{\lambda}^{(+)}(\vec{p}) + (a_{\lambda}^{(-)}(\vec{p}))^* a_{\lambda}^{(-)}(\vec{p}) \right]$$

Urobme následovné priradenie operátorov koeficientom $a_{\lambda}^{(\pm)}$ a $(a_{\lambda}^{(\pm)})^*$:

$$a_{\lambda}^{(+)} \rightarrow a_{\lambda} \quad (a_{\lambda}^{(+)})^* \rightarrow a_{\lambda}^+$$

$$a_{\lambda}^{(-)} \rightarrow b_{\lambda}^+ \quad (a_{\lambda}^{(-)})^* \rightarrow b_{\lambda}$$

kde a_{λ} (a_{λ}^+) sú operátory anihilácie (kreácie) elektrónov

b_{λ} (b_{λ}^+) sú operátory anihilácie (kreácie) pozitronov

Aby energia systému bola kladne definovaná a aby náboj mohol byť aj kladný aj záporný musia platiť antikomutačné vzťahy:

$$\{a_{\lambda}(\vec{k}), a_{\lambda'}^+(\vec{k}')\} = \delta_{\lambda\lambda'} \cdot \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad \{b_{\lambda}(\vec{k}), b_{\lambda'}^+(\vec{k}')\} = \delta_{\lambda\lambda'} \cdot \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$$

O kvantovaní elektromagnetického poľa

Pre vektorový potenciál el. mag. poľa platí:

$$\vec{A}(\mathbf{x}) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega}} \sum_{\lambda} \vec{\epsilon}^{(\lambda)}(\vec{k}) \cdot \left(a_{\lambda}^{(-)}(\vec{k}) \cdot e^{-i\vec{k}\mathbf{x}} + a_{\lambda}^{(+)}(\vec{k}) \cdot e^{i\vec{k}\mathbf{x}} \right)$$

Pre energiu el. mag. poľa platí:

$$H_{em} = \sum_{\lambda} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega} \cdot \omega \cdot \frac{1}{2} \left(a_{\lambda}^{(-)}(\vec{k}) \cdot a_{\lambda}^{(+)}(\vec{k}) + a_{\lambda}^{(+)}(\vec{k}) \cdot a_{\lambda}^{(-)}(\vec{k}) \right)$$

kde $\mathbf{k} = (\omega, \vec{k})$ a $\omega = \sqrt{\vec{k}^2}$

Poznámka. Hamiltonián sme mohli zapísať: $H_{em} = \sum_{\lambda} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega} \cdot \omega \cdot a_{\lambda}^{(-)}(\vec{k}) \cdot a_{\lambda}^{(+)}(\vec{k})$

avšak nechávame ho vo vyššie uvedenom tvare kvôli kvantovaniu.

Kvantovanie:

$$\vec{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \hat{\vec{A}}(\mathbf{x}) \quad (\Psi\text{-operátor})$$

$$a_{\lambda}^{(-)}(\vec{k}) \rightarrow \hat{a}_{\lambda}(\vec{k}) \quad (\text{anihilačný operátor})$$

$$a_{\lambda}^{(+)}(\vec{k}) \rightarrow \hat{a}_{\lambda}^{\dagger}(\vec{k}) \quad (\text{kreačný operátor})$$

Komutačné vzťahy:

$$[\hat{a}_{\lambda}(\vec{k}), \hat{a}_{\lambda'}^{\dagger}(\vec{k}')] = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \delta_{\lambda\lambda'}$$

Fokov Priestor

Na základe operátorov $\hat{\Psi}$ a $\hat{\pi}$ (alebo kreačných a anihilačných operátorov, vid'. ďalej) je možné skonštruovať Hamiltonián H systému interagujúcich polí. H pôsobí vo Fokovom priestore stavov

$$\Phi \equiv \{|\phi\rangle\} \quad \text{kde} \quad |\phi\rangle = \underbrace{c_0|\phi_0\rangle}_{\text{vákuum}} + \underbrace{c_1|\phi_1\rangle}_{1\text{-časticový stav}} + \underbrace{c_2|\phi_2\rangle}_{2\text{-časticový stav}} + \dots$$

Operátory kreácie a anihilácie

Operátory kreácie a anihilácie $a(\mathbf{k})$, $a^+(\mathbf{k})$ hrajú kľúčovú úlohu v mnohočasticovej interpretácii kvantovej teórie pol'a. Vychádzajme z operátora

$$N(\mathbf{k}) = a^+(\mathbf{k})a(\mathbf{k})$$

Jeho vlastné hodnoty označme $n(\mathbf{k})$:

$$N(\mathbf{k})|n(\mathbf{k})\rangle = n(\mathbf{k})|n(\mathbf{k})\rangle$$

Použijúc komutačné vzťahy pre $a(\mathbf{k})$, $a^+(\mathbf{k})$:

$$[N(\mathbf{k}), a^+(\mathbf{k})] = a^+(\mathbf{k})$$

$$[N(\mathbf{k}), a(\mathbf{k})] = -a(\mathbf{k})$$

dostávame:

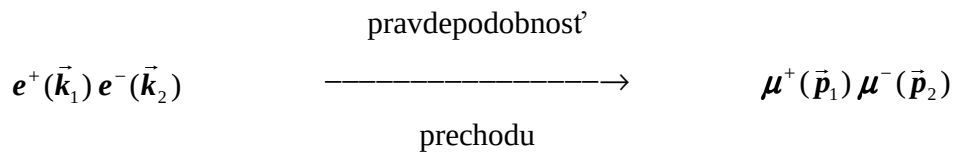
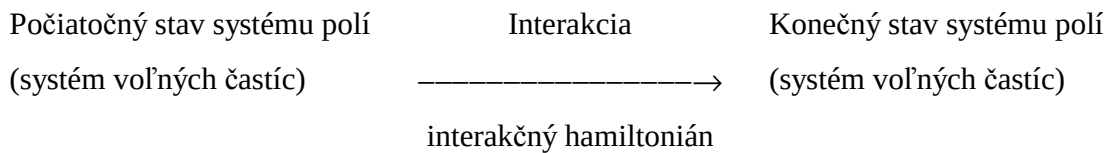
$$\begin{aligned} N(\mathbf{k})a^+(\mathbf{k})|n(\mathbf{k})\rangle &= a^+(\mathbf{k})N(\mathbf{k})|n(\mathbf{k})\rangle + a^+(\mathbf{k})|n(\mathbf{k})\rangle \\ &= (n(\mathbf{k})+1)a^+(\mathbf{k})|n(\mathbf{k})\rangle \end{aligned}$$

Teda ak stav $|n(\mathbf{k})\rangle$ je vlastný stav operátora $N(\mathbf{k})$ s vlastnou hodnotou $n(\mathbf{k})$, potom

$a^+(\mathbf{k})|n(\mathbf{k})\rangle$ je vlastný stav operátora $N(\mathbf{k})$ s vlastnou hodnotou $n(\mathbf{k})+1$.

Analogicky je možné ukázať, že $a(\mathbf{k})|n(\mathbf{k})\rangle$ je vlastný stav operátora $N(\mathbf{k})$ s vlastnou hodnotou $n(\mathbf{k})-1$.

Schéma interakcie v kvantovej teórii pol'a (QFT)



Cieľom QFT je nájsť element $\langle \phi_{in} | H | \phi_{out} \rangle$, ktorý udáva pravdepodobnosť prechodu zo stavu $|\phi_{in}\rangle$ do stavu $|\phi_{out}\rangle$ v dôsledku interakcie.

QFT dáva recept na výpočet tejto amplitúdy prechodu, ktorý predstavujú Feynmanove diagramy.