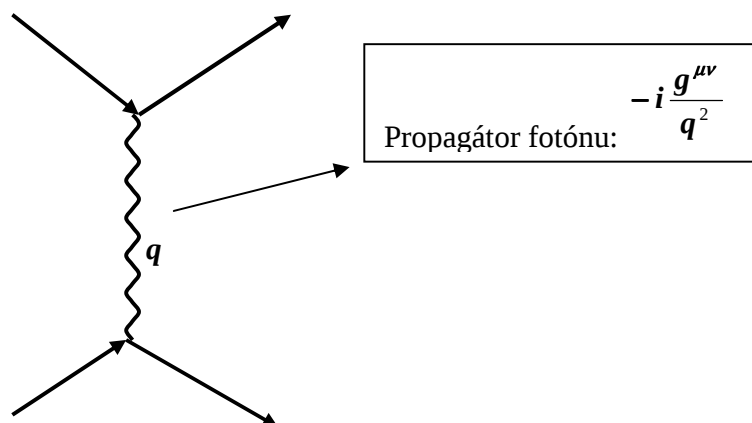
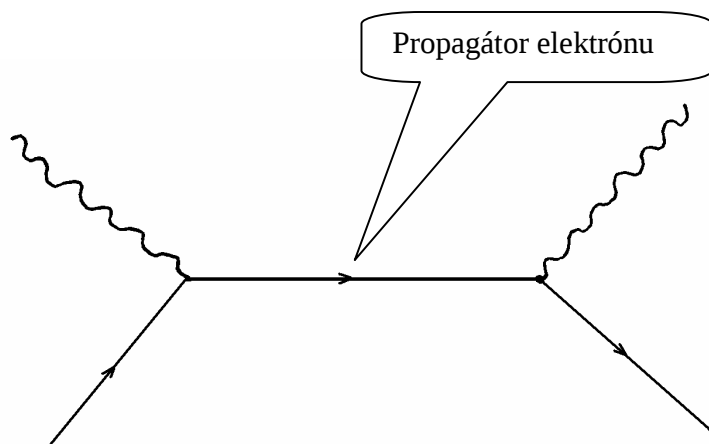


Propagátor popisuje šírenie virtuálnej častice, t.j. častice, ktorá sa nenáchadza na hmotnostnej hyperploche: $p^2 \neq m^2$. V diagramoch im odpovedajú vnútorné čiary (viď. obr.1).



Obr. 1: Propagátor fotónu (hybnosť q)

Virtuálnou časticou môže byť nielen fotón, ale aj ľubovoľná iná častica. Ako príklad môžeme uviesť elektrón v prípade Comptonovho efektu (obr. 2).



Obr. 2: Comptonov efekt - propagátor elektrónu

Ako nájsť propagátor?

Je to inverzný operátor k operátoru pohybovej rovnice častice (Lagrangeova rovnica poľa, ktorého kvantom je daná častica) v $\mathbf{p}$ -reprezentácii (priestor hybností) Aplikujeme tento recept na častice s rôznym spinom.

Propagátor častice so spinom 0.

Pohybová rovnica pre časticu so **spinom 0** v poli potenciálu V je:

$$i(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\varphi = -iV\varphi$$

Keďže operátor 4-hybnosti je $\mathbf{p}^\mu = -i\partial^\mu$ pre propagátor dostávame:

$$\frac{1}{i(-p^2 + m^2)} = \frac{i}{p^2 - m^2} \quad (1)$$

Propagátor častice so spinom 1/2.

Pre časticu so spinom 1/2 v poli potenciálu A_μ platí:

$$-i(\mathbf{p}^\mu \gamma_\mu - m)\psi = ie\gamma_\mu A^\mu$$

Teda propagátor je:

$$\frac{1}{-i(\hat{\mathbf{p}} - m)} = \frac{i(\hat{\mathbf{p}} + m)}{p^2 - m^2} \quad \hat{\mathbf{p}} \equiv \mathbf{p}^\mu \gamma_\mu \quad (2)$$

Propagátor fotónu (spin 1 a $m=0$).

Pohybová (vlnová) rovnica pre fotón:

$$(g^{\mu\nu} \partial_\rho \partial^\rho - \partial^\mu \partial^\nu)A_\nu = j^\mu$$

Najprv je treba zbaviť A_ν kalibračnej slobody, lebo operátor $g^{\mu\nu} \partial_\rho \partial^\rho - \partial^\mu \partial^\nu$ nemá inverzný operátor: aplikáciou Lorentzovej podmienky: $\partial_\mu A^\mu = 0$. To vedie k:

$$g^{\mu\nu} \partial_\rho \partial^\rho A_\nu = j^\mu$$

Čo vedie k propagátoru (q je 4-hybnosť fotónu):
$$i \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2} \quad (3)$$

Propagátor častice so spinom 1 a $m \neq 0$.

Pohybovú rovnicu pre voľnú časticu s $S=1$ a $m \neq 0$ dostaneme z rovnice pre fotón zámenou: $\partial_\mu \partial^\mu \rightarrow \partial_\mu \partial^\mu + m^2$, teda

$$(g^{\mu\nu}(\partial_\rho \partial^\rho + m^2) - \partial^\mu \partial^\nu) B_\nu = 0$$

$$\Rightarrow \text{propagátor: } i(g^{\mu\nu}(-p^2 + m^2) + p^\mu p^\nu)^{-1} = \frac{i\left(-g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m^2}\right)}{p^2 - m^2} \quad (4)$$

Greenova funkcia a propagátor

Definícia. Greenova funkcia je odozva na bodový jednotkový zdroj. Uvažujme pohyb elektrónu v el. mag. poli:

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi = -e\gamma_\mu A^\mu \quad (5)$$

Pravá strana rovnice (5) predstavuje zdrojovú funkciu elektrón-positrónového poľa. Problém pohybu elektrónu v poli A_μ je možné vyriešiť tak, že najprv riešime:

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)G_F(x - x') = \delta^4(x - x') \quad (6)$$

Kde $G_F(x - x')$ je odozva (vlna) v bode x od bodového jednotkového zdroja v bode x' .

Riešenie rovnice (5) môžeme vyjadriť ako:

$$\psi(x) = -e \int d^4 x' G_F(x - x') \cdot \gamma_\mu A^\mu(x') \quad (7)$$

Greenovu funkciu G_F hľadáme vo forme Fourierovho rozvoja:

$$G_F(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \cdot S_F(p) e^{-ip(x-x')} \quad (8)$$

Po dosadení do (6) a vyjadrení Fourierovho rozvoja pre δ -funkciu

$$(\delta^4(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \cdot e^{-ip(x-x')}) \text{ dostávame:}$$

$$(p^\mu \gamma_\mu - m)S_F(p) = 1 \Rightarrow S_F(p) = \frac{1}{\hat{p} - m} = \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2} \quad (9)$$

Ak chceme nájsť G_F musíme vedieť ako zaobchádzať so singularitami v $S_F(p)$:

$$p^2 - m^2 = p_0^2 - (\vec{p}^2 + m^2) = (p_0 + E)(p_0 - E)$$

kde $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. Teda $S_F(p)$ má póly v $p_0 = \pm E$.

Ako nájsť všeobecné riešenie rovnice pre Greenovu funkciu ?

Z matematickej analýzy vieme: **všeobecné riešenie rovnice (6)** $\equiv$

$\equiv$ partikulárne riešenie (6) + všeobecné riešenie homogennej rovnice (6)

(rovnica (6) bez pravej strany)

Riešenie homogennej rovnice (6) poznáme (Diracova rovnica). Riešenie s kladnou energiou si označíme ako $D^-(x-x')$ a riešenie so zápornou energiou ako $D^+(x-x')$.

Teda vo všeobecnosti pre Greenovu funkciu (riešenie rovnice (6)) dostávame:

$$G_F(x-x') = G_{part}(x-x') + c_1 D^-(x-x') + c_2 D^+(x-x') \quad (10)$$

Koeficienty c_1 a c_2 sa fixujú okrajovými podmienkami.

Okrajové podmienky

Jednotkový zdroj spinorového poľa je v bode $x' \equiv (t', \vec{x}')$ a od Greenovej funkcie požadujeme, aby popisovala:

1. šírenie elektrónu s kladnou energiou ($E > 0$) v čase dopredu ($t > t'$) (**OP1**)
2. šírenie elektrónu so zápornou energiou ($E < 0$) v čase dozadu ($t < t'$) (**OP2**)

Fyzikálna interpretácia.

$\Rightarrow$ Okrajová podmienka **OP1** znamená:

Ak sa v čase t' v bode $\vec{x}'$ objavil jeden **elektrón**, potom G_F bude udávať pravdepodobnosť výskytu tohoto elektrónu v bode $\vec{x}$ v neskoršom čase $t (> t')$.

$\Rightarrow$ Okrajová podmienka **OP2** znamená:

Ak sa v čase t v bode $\vec{x}$ objavil jeden **pozitron**, potom G_F bude udávať pravdepodobnosť jeho výskytu v bode $\vec{x}'$ v neskoršom čase $t' (> t)$.

Ukážeme si, že pri splnení podmienky **OP1** Greenova funkcia popisuje šírenie elektrónu v čase dopredu a pri splnení podmienky **OP2** šírenie pozitronu v čase dopredu.

Vyjadríme si G_F cez jej Fourierov obraz v priestore hybnosti, vid'.(7) a (8):

$$G_F(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3\vec{p} \cdot e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}')} \int dp_0 \frac{(\hat{p}+m)e^{-ip_0(t-t')}}{(p_0-E)(p_0+E)} \quad (11)$$

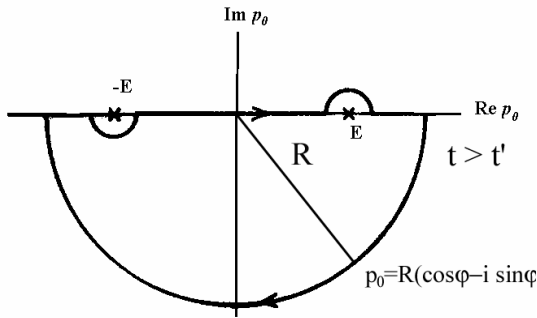
Podintegrálna funkcia $S_F(p)$ v $\int dp_0 \dots$ má póly pre $p_0 = \pm E$.

Integral $I(p_0) = \int dp_0 \dots$ sa rieši metódou komplexnej premennej, ktorá spočíva v zámene:

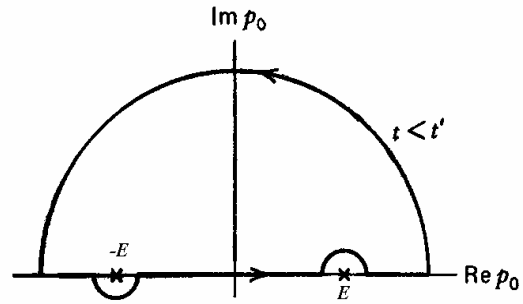
$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \dots \rightarrow \int_C dp_0 \dots \quad (12)$$

Kde C je uzavretá krivka v komplexnej rovine obsahujúca interval $(-\infty, \infty)$, avšak obchádzajúca póly $p_0 = \pm E$. Póly musíme obchádzať tak, aby boli splnené okrajové podmienky **OP1** a **OP2**.

Požadujeme, aby Greenova funkcia popisovala šírenie elektrónu s kladnou energiou pre $t > t'$ (okrajová podmienka **OP1**). Ukážeme si, že splnenie podmienky **OP1** si vyžaduje, aby póly boli obchádzané ako je ukázané na obr. 3 – obchvat pólu $p_0 = +E$.



Obr. 3: Uzatváranie krivky integrovania pre $t > t'$: v dolnej polrovine (pól $p_0 = +E$)



Obr. 4: Uzatváranie krivky integrovania pre $t < t'$: v hornej polrovine (pól $p_0 = -E$)

Použijúc Cauchyho vetu pre integrál po krivke C (obr.3) dostávame:

$$I(p_0) = \int_C dp_0 \frac{(\hat{p} + m) e^{-ip_0(t-t')}}{(p_0 - E)(p_0 + E)} = \int_P dp_0 \dots + \int_K dp_0 \dots = -2\pi i \frac{(\hat{p} + m) e^{-iE(t-t')}}{2E} \quad (13)$$

Chceme, aby integrál $\int_K dp_0 \dots$ po polkružnici K konvergoval k 0 pre $R \rightarrow \infty$. Z hľadiska konvergenzie uvedeného integrálu je kritickým faktor $e^{ip_0(t-t')}$. Avšak pre $t > t'$ a pre bod na dolnej polkružnici $p_0 = R(\cos \varphi - i \sin \varphi)$ platí:

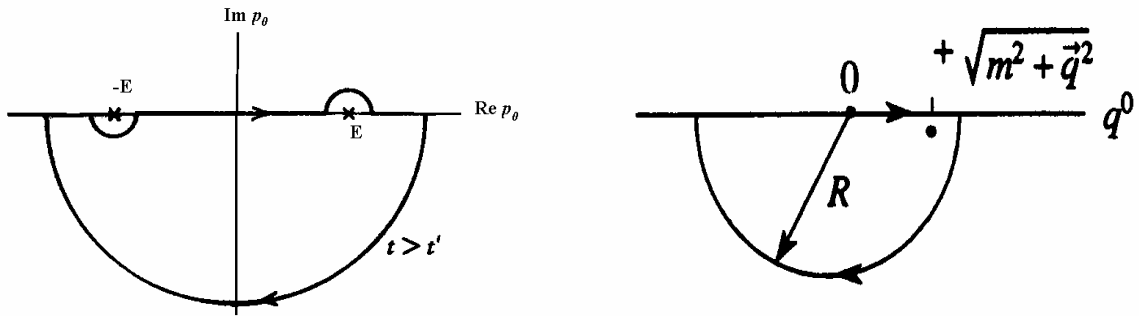
$$e^{-ip_0(t-t')} = e^{-iR \cos \varphi(t-t')} \cdot e^{-R \sin \varphi(t-t')} \xrightarrow{R \rightarrow \infty \wedge t > t'} 0 \quad (14)$$

Záver. Teda pri uzatváraní krivky C v dolnej polrovine pre prípad $t > t'$ platí:

$$\int_K dp_0 \dots \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \Rightarrow \int_C dp_0 \dots = \int_P dp_0 \dots \quad (15)$$

Ak urobíme posunutie pólov $p_0 = \pm E \rightarrow p_0 = \pm(E - i\varepsilon)$ a prejdeme od C k

$C' \equiv (-\infty, \infty) \cup K$:



Obr. 5: Zmena krivky integrovania od krivky C (obr. vľavo) ku krivke C' (obr. vpravo)

Ked' prejdeme ku krivke C' , potom platí:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \dots &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C'} dp_0 \frac{(\hat{p} + m) \exp[-ip_0(t-t')]}{(p_0 - E + i\varepsilon)(p_0 + E - i\varepsilon)} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-2\pi i \frac{(\hat{p} + m) \exp[-iE(t-t') - \varepsilon(t-t')]}{2(E - i\varepsilon)} \right) = -2\pi i \frac{(\hat{p} + m) \exp[-iE(t-t')]}{2E} \end{aligned} \quad (16)$$

Dosadiac do výrazu (11) za integral $I(p_0) = \int dp_0 \dots$ vypočítanú hodnotu (16) pre Greenovu funkciu v prípade $t > t'$ dostávame:

$$G_F(x - x') = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d\vec{p} \frac{(\hat{p} + m) \exp[-ip(x - x')]}{2E} \quad (17)$$

kde $p \equiv (E, \vec{p})$, $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ a $\hat{p} + m = \sum_{s=1,2} u^{(s)}(p) \bar{u}^{(s)}(p)$ je projekčný operátor,

ktorý robí projekciu na stav elektrónu s kladnou energiou E (viď. poznámka), takže G_F popisuje šírenie elektrónu v čase dopredu.

Poznámka. Predpokladajme, že v čase $t' < t$ je $e^+ e^-$ pole popísané funkciou

$$\psi(x') = (c_1 u^{(1)}(\vec{p}) + c_2 u^{(2)}(\vec{p}) + c_3 v^{(1)}(\vec{p}) + c_4 v^{(2)}(\vec{p})) \varphi(x')$$

Na základe (7), v čase t bude funkciou poľa:

$$\psi(x) = \int dx' G_F(x - x') \psi(x') = (c'_1 u^{(1)}(\vec{p}) + c'_2 u^{(2)}(\vec{p})) \int dx' \varphi(x') \exp[-ip(x - x')]$$

V dôsledku ortogonálnosti $\bar{u}^{(s)} v^{(t)} = 0$ – výsledok neobsahuje stavy zo zápornou energiou.

Podmienka OP2. Predpokladajme, že $t < t'$, potom $\int_K dp_0 \dots$ konverguje k 0 pre $R \rightarrow \infty$,

ak polkružnicu K uzatvárame v hornej polovici a teda obklopujeme pól $p_0 = -E$ (viď. Obr.4). V tomto prípade:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \dots = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_C dp_0 \frac{(\hat{p} + m) \exp[-ip_0(t - t')]}{(p_0 - E + i\epsilon)(p_0 + E - i\epsilon)} = 2\pi i \frac{(-E\gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} + m) \exp[iE(t - t')]}{-2E} \quad (18)$$

Čo vedie ku Greenovej funkcii:

$$G_F(x - x') = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d\vec{p} \frac{(-E\gamma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\gamma} + m)}{-2E} \exp[iE(t - t') + ip(x - x')] \quad (19)$$

$$\xrightarrow{\vec{p} \rightarrow -\vec{p}} = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d\vec{p} \frac{(-\hat{p} + m)}{2E} \exp[ip(x - x')]$$

Vo všeobecnosti teda pre Greenovu funkciu spinorového ($e^+ e^-$) poľa platí:

$$G_F(x - x') = \begin{cases} \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{p}}{2E} (\hat{p} + m) \exp[-ip(x - x')] & t > t' \\ \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{p}}{2E} (-\hat{p} + m) \exp[ip(x - x')] & t < t' \end{cases} \quad (20)$$

V oboch prípadoch, pre $t > t'$ aj pre $t < t'$, sa póly obchádzajú správne, ak urobíme zámenu: $E \rightarrow E - i\varepsilon$. Teda

$$G_F(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip(x - x')} \Rightarrow iS_F(p) = i \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (21)$$

Vzťah (21) udáva súvislosť medzi Greenovou funkciou a propagátorom. Propagátor predstavuje sebou Fourierov obraz Greenovej funkcie v priestore hybností.

Poznámka. Pri použití Cauchyho vety na výpočet integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \dots$ pre $t > t'$ sa

polkružnica K musí uzatvárať v dolnej polrovine, len vtedy bude $\int_K dp_0 \dots = 0$

a z rovnakých dôvodov v hornej polrovine pre $t < t'$. Keď urobíme zámenu:

$$p_0 = \pm E \rightarrow \pm(E - i\varepsilon),$$

pól s kladnou energiou ($+E - i\varepsilon$) (súvisí s elektrónom) automaticky padne do dolnej polroviny a pól so zápornou energiou ($-E + i\varepsilon$) (súvisí s pozitronom) automaticky padne do hornej polroviny. Teda uvedená zámena automaticky zabezpečuje, že póly pre elektrón a pozitron sa obklopujú správne.

Poznámka. Zmena pólu z E na $E - i\varepsilon$ prakticky znamená, že sme nahradujeme stabilnú časticu s energiou E nestabilnou časticou s energiou E a dobou života $\tau = 1/\varepsilon$. Je tomu tak preto, lebo evolučný faktor: $e^{-i(E - i\varepsilon)t} = e^{-iEt} \cdot e^{-\varepsilon t} = e^{-iEt} \cdot e^{-t/\tau}$ túto skutočnosť jasne dokumentuje.