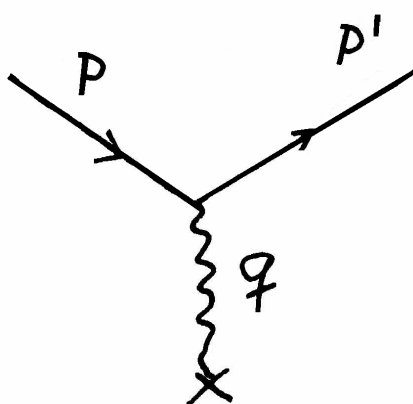


Amplitúda rozptylu v druhom ráde poruchovej teórie

Rozptyl elektrónov na statickom potenciáli.

Uvažujme rozptyl elektrónu v poli statického potenciálu (napr. atómového jadra).

Amplitúda prechodu elektrónu z počiatočného do konečného stavu je v prvom priblížení daná:



$$T_{fi} = -i \int d^4x j_\mu^{fi}(x) \cdot A^\mu(x)$$

Použijúc $j_\mu^{fi}(x) = -e\bar{u}_f \gamma_\mu u_i e^{-iqx}$ dostávame:

$$T_{fi} = ie\bar{u}_f \gamma_\mu u_i \int d^4x A_\mu e^{-iqx} = ie\bar{u}_f \gamma_\mu u_i A_\mu(q) \quad (1)$$

kde $A_\mu(q)$ je Fourierov obraz $A_\mu(x)$. V prípade statického potenciálu $A_\mu(x)$ nezávisí od času:

$$A_\mu(q) = \int dt e^{-i(E_f - E_i)t} \int d^3\vec{x} A_\mu(x) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} = 2\pi\delta(E_f - E_i) A_\mu(\vec{q}) \quad (2)$$

Obr. 1: Rozptyl elektrónu na statickom potenciáli (1. priblíženie), elektrón si vymenil s rozptylovým centrom + fotón

Na určenie 3-rozmerného Fourierovho obrazu $A^\mu(q)$ použijeme Maxwellove rovnice:

$$\nabla^2 A^\mu(\vec{x}) = -j^\mu(\vec{x}) \quad (3)$$

Čo vedie k

$$\begin{aligned} j^\mu(\vec{q}) &= \int d^3x j^\mu(\vec{x}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} = -\int d^3x (\nabla^2 A^\mu(\vec{x})) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \\ \text{per partes} \Rightarrow &= \vec{q}^2 \cdot \int d^3x A^\mu(\vec{x}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} = \vec{q}^2 \cdot A^\mu(\vec{q}) \end{aligned} \quad (4)$$

Výsledok pre amplitúdu rozptylu elektrónu v prvom priblížení je

$$T_{fi} = 2\pi\delta(E_f - E_i) \cdot e\bar{u}_f \gamma_\mu u_i \cdot \frac{1}{|\vec{q}|^2} \cdot j^\mu(\vec{q}) \quad (5)$$

Prítomnosť δ -funkcie vedie k tomu, že $q_0=0$ a teda $q^2 = -|\vec{q}|^2$.

Predpokladajme, že statický potenciál je potenciál atómového jadra s nábojom Ze . Potom invariantná amplitúda eZe -rozptylu je:

$$-iM = ie\bar{u}_f \gamma^\mu u_i \cdot \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \cdot (-i j^\nu(\vec{q})) = ie\bar{u}_f \gamma^0 u_i \cdot \frac{-i}{q^2} \cdot (-iZe) \quad (6)$$

kde

$$j^0(\vec{x}) = Ze\delta(x) \quad , \quad \vec{j}(\vec{x}) = \vec{0}$$

Účinný prierez e^-Ze -rozptylu (rutherfordovský rozptyl) v prvom priblížení:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim |M|^2 \sim \frac{\alpha^2}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}; \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi} \quad (7)$$

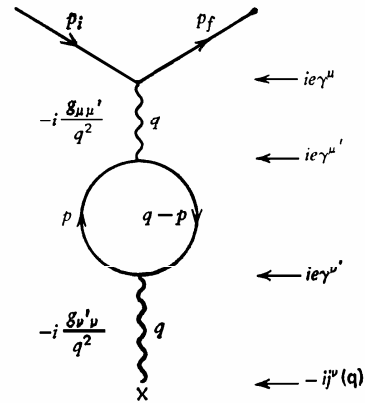
Rutherfordovský rozptyl v druhom ráde poruchovej metódy (priblíženie e^4).

Do e^-Ze^- -rozptylu je treba zahrnúť aj diagramy so 4 vertexami. Najprv budeme uvažovať rutherfordovský rozptyl v prípade fluktuácie virtuálneho fotónu na pár e^+e^- (vid'. Obr.2).

Očakávame, že po zahrnutí 2. rádu poruchovej metódy bude amplitúda procesu mať tvar:

$$M = \alpha A^{(1)} + \alpha^2 A^{(2)}, \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi},$$

keďže konštanta jemnej štruktúry $\alpha \approx 1/137$, očakávame, že vklad 2. rádu bude potlačený asi 100-krát. Pravda, za predpokladu, že spinorové časti amplitúdy ($A^{(1)}, A^{(2)}$) sa príliš nelíšia. Ukážeme si, že priamočiary výpočet $A^{(2)}$ vedie k divergencii tejto veličiny



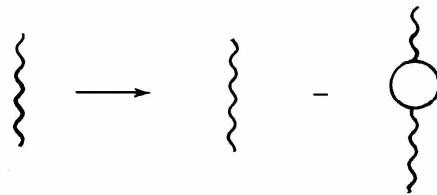
Obr. 2: Rutherfordovský rozptyl v 2. priblížení – fluktuácie virtuálneho fotónu na pár e^+e^- .

Invariantná amplitúda:

$$-iM^{(2)} = -ie\bar{u}_f \gamma^\mu u_i \cdot \frac{-ig_{\mu\mu'}}{q^2} \cdot \int d^4p \left[(ie\gamma^{\mu'})_{\alpha\beta} \cdot \frac{(\hat{p} + m)_{\beta\delta}}{p^2 - m^2} \cdot (ie\gamma^{\nu'})_{\delta\lambda} \cdot \frac{(\hat{q} - \hat{p} + m)_{\lambda\alpha}}{(q-p)^2 - m^2} \right] \cdot \left(-i \frac{g_{\nu\nu'}}{q^2} \right) (-i j^\nu(\vec{q})) \quad (8)$$

Dodanie amplitúdy $M^{(2)}$ ($\sim e^4$) k amplitúde $M^{(1)}$ ($\sim e^2$) je ekvivalentné nasledovnej modifikácii propagátora:

Obr. 3: Modifikácia propagátora umožňujúca zahrnúť efekt virtuálnych párov do amplitúdy rozptylu



$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \rightarrow \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\mu'}}{q^2} \cdot I^{\mu'\nu'}(q^2) \cdot \frac{-ig_{\nu\nu'}}{q^2} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-i}{q^2} \cdot I_{\mu\nu}(q^2) \cdot \frac{-i}{q^2} \quad (9)$$

Kde

$$I_{\mu\nu}(q^2) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[(ie\gamma_\mu) \cdot \frac{(\hat{p} + m)}{p^2 - m^2} \cdot (ie\gamma_\nu) \cdot \frac{(\hat{q} - \hat{p} + m)}{(q-p)^2 - m^2} \right] \quad (10)$$

Problém je v tom, že veličina $I_{\mu\nu}(q^2)$ diverguje pri $p \rightarrow \infty$ (pre výpočet $I_{\mu\nu}$ je treba vypočítať stopy γ -matic (viď. Doplnok A) a potom vypočítať samotný integrál (doplnok B).

Výpočet integrálu $I_{\mu\nu}(q^2)$ dáva:

$$I_{\mu\nu}(q^2) = g_{\mu\nu} I(q^2) + \underbrace{\dots}_{\text{členy} \sim q_\mu q_\nu} \quad (11)$$

Kde

$$I(q^2) = \underbrace{\frac{\alpha}{3\pi} \int_{m^2}^{\infty} \frac{dp^2}{p^2}}_{\text{logaritmicke diverguje}} - \underbrace{\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \cdot z(1-z) \ln \left(1 - \frac{q^2 z(1-z)}{m^2} \right)}_{\text{konečná časť}}, \quad (12)$$

kde m je hmotnosť elektrónu. Členy úmerné $q_\mu q_\nu$ dávajú nulový vklad do amplitúdy po presumovaní. Je to dôsledok kalibračnej invariantnosti elektromagnetickej interakcie, ktorá vedie k zákonu zachovania náboja: $\partial_\mu J^\mu(x) = 0 \rightarrow q_\mu j^\mu(p) = 0$ (kde q_μ je 4-hybnosť fotónu, ku ktorému sa viaže prúd j^μ) a amplitúda $M^{(2)}$ má štruktúru $M^{(2)} \sim j^\mu I_{\mu\nu} j^\nu$. Problém sa pokúsime vyriešiť tak, že najprv budeme regularizovať logaritmicke divergujúcu časť $I(q^2)$, tj. v $I(q^2)$ urobíme zámenu:

$$\infty \rightarrow M^2$$

Poznámka. Regularizácia predstavuje ohraničenie zhora hybnosti „cirkulujúcej“ v slučke. Toto ohraničenie znamená podľa Heisenbergovho princípu neurčitosti diskretnosť priestoru na úrovni $1/M$. Ak za hranicu M si zvolíme Planckovu hmotnosť

($M_p = \sqrt{\hbar c/G} = 1.22 \cdot 10^{19} \text{ GeV} / c^2$), potom diskretnosť priestoru je reprezentovaná minimálnou dĺžkou $l_p = \hbar/(M_p c) \approx 1.6 \cdot 10^{-35} \text{ m}$.

Efekty e^+e^- –slučiek pri malých prenesených hybnostiach

Pri malých hybnostiach ($-q^2 \ll m^2$) platí:

$$\ln\left(1 - \frac{q^2 z(1-z)}{m^2}\right) \approx -\frac{q^2 z(1-z)}{m^2} \quad (13)$$

V tomto prípade pre $I(q^2)$ dostávame:

$$I(q^2) \approx \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{M^2}{m^2} + \frac{\alpha}{15\pi} \frac{q^2}{m^2} \quad (14)$$

Efekty e^+e^- –slučiek pri veľkých prenesených hybnostiach

Pri veľkých hybnostiach ($-q^2 \gg m^2$) platí:

$$\ln\left(1 - \frac{q^2 z(1-z)}{m^2}\right) \approx \ln\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) \quad (15)$$

a

$$I(q^2) \approx \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{M^2}{m^2}\right) - \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) = \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{M^2}{-q^2}\right) \quad (16)$$

Amplitúda rutherfordovského rozptylu pri malých prenesených hybnostiach

Ak do vzťahu (11) za $I(q^2)$ dosadíme výraz (14) a v amplitúde (6) takto zameníme propagátor podľa schémy (9), pre amplitúdu rozptylu v 2. ráde dostaneme:

$$-iM = ie\bar{u}_f \gamma^0 u_i \cdot \left(\frac{-i}{q^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln\left(\frac{M^2}{m^2}\right) - \frac{e^2}{60\pi^2} \frac{q^2}{m^2} + O(e^4)\right) (-iZe) \quad (17)$$

Ak zavedieme redukovaný náboj

$$e_R = e \left(1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln\left(\frac{M^2}{m^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

tak s presnosťou $O(e^4)$ pre $(-iM)$ dostávame:

$$-iM = ie_R \bar{u}_f \gamma^0 u_i \cdot \left(\frac{-i}{q^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{e_R^2}{60\pi^2} \frac{q^2}{m^2}\right) (-iZe_R) \quad (19)$$

Predpokladajme, že to čo sa meria v experimente pri $q^2 \approx 0$ (Thompsonov rozptyl) je redukovaný náboj e_R , potom však amplitúda M je v 2. priblížení konečná.

Poznámka. Náboj e , cez ktorý sme pôvodne vyjadrili amplitúdu M , je náboj, ktorý „sedí“ v pohybovej rovnici (pre pohyb elektrónu v el-mag poli). Pritom na pohybovú rovnicu sa môžeme dívať ako na Lagrangeovu rovnicu určitého fyzikálneho systému polí (v našom prípade obsahuje elektrón-pozitrónové a elektromagnetické pole) s daným Lagranžiánom - náš prípad:

$$\text{Lagranžián QED: } L_{QED} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + eQ A_\mu \cdot \bar{\psi}\gamma^\mu\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

Náboj e , ktorý „sedí“ v Lagranžiáne, budeme ho nazývať holý náboj, sa líši od experimentálne určeného náboja.

Lambovo posuv

Prvý člen v amplitúde e^-Ze -rozptylu (19) je spojený s Coulombovým potenciálom. O čom sa možno presvedčiť spätnou Fourierovou transformáciou:

$$V_0(r) = Ze_R^2 \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{\exp(i\vec{q} \cdot \vec{r})}{|\vec{q}|^2} = \frac{Ze_R^2}{4\pi r} \quad (20)$$

$$\left(d^3\vec{q} = 2\pi|\vec{q}|^2 d|\vec{q}| \sin\vartheta d\vartheta, \quad \vec{q} \cdot \vec{r} = |\vec{q}|r \cdot \cos\vartheta \right)$$

Druhý člen v amplitúde e^-Ze -rozptylu (19) zodpovedá efektom virtuálnych e^+e^- -párov v propagátore:

$$\frac{Ze_R^4}{60\pi^2 m^2} \cdot \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) = \frac{Ze_R^4}{60\pi^2 m^2} \delta(\vec{r}) \quad (21)$$

Teda potenciál, pôsobí medzi nábojom jadra a elektrónom je:

$$V(r) = \underbrace{-\frac{Ze_R^2}{4\pi r}}_{\text{coulombovský vklad}} - \underbrace{\frac{Ze_R^4}{60\pi^2 m^2} \delta(\vec{r})}_{\text{vklad virtuálnych párov } e^+e^-} \quad (22)$$

Poznámka. Výraz (22) nie je presný, lebo sme použili približnú hodnotu $I(q^2)$ pri malých $(-q^2)$.

Dôležité je, že vklad virtuálnych párov v propagátore fotónu má experimentálny prejav, ktorý bol pozorovaný – vedie k posunu energetických hladín vodíka, tj. k tzv. Lambovmu posunu (Lamb shift). Použijúc poruchovú teóriu, vklad doplnkového člena vedie k nasledovnému posuvu energetických hladín:

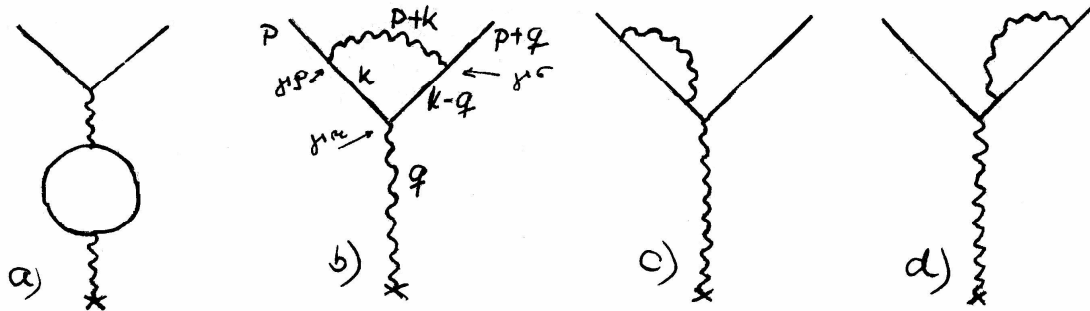
$$\Delta E_{nl} = -\frac{e_R^4}{60\pi^2 m^2} \cdot |\Psi_{nl}(0)|^2 \cdot \delta_{l0} \quad (23)$$

Kde $\Psi_{nl}(0)$ je hodnota vlnovej funkcie popisujúcej stav atómu vodíka s hlavným kvantovým číslom n a orbitálnym kvantovým číslom l v centre atómu, tj. v jadre.

Lambovo posun sa v spektrách atómu vodíka skutočne pozoruje!

Anomálny magnetický moment elektrónu.

Úplný súbor diagramov $\sim e^4$ (2. rád poruchovej teórie) pre e^-Ze -rozptyl je na obr. 4.



Obr. 4: Diagramy pre eZe -rozptyl v druhom ráde poruchovej teórie.

Slučky v diagramoch b, c a d, podobne ako v diagrame a, tiež divergujú. Tieto divergencie môžu byť „skryté“ v redefinovaný náboj, hmotnosť vlnovú funkciu elektrónu. Uvažujme diagram b, slučka vo vertexe modifikuje štruktúru elektrónového toku ($-e\bar{u}_f \gamma^\mu u_i$):

$$\begin{aligned} -e\bar{u}_f \gamma^\mu u_i &\rightarrow -e\bar{u}_f (\gamma^\mu + \Lambda^\mu) u_i = \\ &= i\bar{u}_f (ie\gamma^\mu) u_i + i\bar{u}_f \left((ie)^3 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \cdot \frac{-ig_{\rho\sigma}}{(k+p)^2} \gamma^\rho \frac{i(\hat{k}-\hat{q}+m)}{(k-q)^2-m^2} \gamma^\mu \frac{i(\hat{k}+m)}{k^2-m^2} \gamma^\sigma \right) u_i \end{aligned} \quad (24)$$

V priblížení e^4 a pre malé $(-q^2)$:

$$I_{(4b)} \approx -e\bar{u}_f \left\{ \underbrace{\gamma^\mu \left[1 + \frac{\alpha}{3\pi} \frac{q^2}{m^2} \left(\ln \frac{m}{m_\gamma} - \frac{3}{8} \right) \right]}_{\text{modifikuje náboj}} - \underbrace{\left[\frac{\alpha}{2\pi} \frac{i\sigma_{\mu\nu}}{2m} q^\nu \right]}_{\text{modifikuje el.tok}} \right\} u_i \quad (25)$$

Poznámka. m_γ je malá efektívna hmotnosť fotónu, ktorá bola zavedená na odstránenie divergencie pri malých $|\mathbf{k}|$ (žeby konečnosť vesmíru?). Wardova identita nám ukáže, vklad diagramu (b) modifikujúci náboj sa ruší s vkladmi diagramov (c) a (d), preto ho v (25) môžeme ignorovať.

Urobme Gordonovo rozloženie el-mag. toku:

$$-e\bar{u}_f \gamma^\mu u_i = -e\bar{u}_f \left(\frac{(p_f + p_i)^\mu}{2m} - i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right) u_i \quad (26)$$

Člen $\sigma^{\mu\nu} q_\nu$ popisuje magnetický moment elektrónu:

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m} \vec{\sigma} = -g \frac{e}{2m} \vec{S} \quad (27)$$

Kde $\vec{S} = \vec{\sigma}/2$ a $g=2$ je gyromagnetický faktor.

Dosadením Gordonovho rozloženia do amplitúdy (25) - pre magnetický moment dostávame:

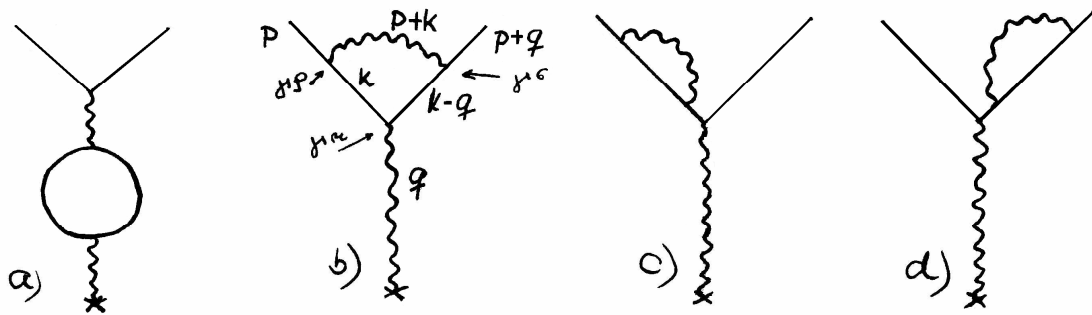
$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m} \left(1 + \underbrace{\frac{\alpha}{2\pi}}_{\text{anomálny mag. moment}} \right) \vec{\sigma} \quad (28)$$

Teda $g=2+\alpha/\pi$. Ak zahrnieme aj vyššie rády poruchovej teórie – dosiahneme vynikajúcu zhodu s experimentom:

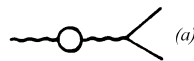
$$\begin{aligned} \left(\frac{g-2}{g} \right)_{\text{theory}} &= (1159655.4 \pm 3.3) \cdot 10^{-9} \\ \left(\frac{g-2}{g} \right)_{\text{exper}} &= (1159657.7 \pm 3.5) \cdot 10^{-9} \end{aligned} \quad (29)$$

Wardova identita.

Úplný výpočet amplitúdy si žiada zahrnúť do e_R (v priblížení e^4) aj nekonečné časti slučiek:



Je jasné, že diagram (a) je diagram (a)



Nezávisí od typu rozptyľovanej častice.

Avšak v prípade diagramov (b), (c) a (d) je rozptyľovaná častica časťou slučiek. Keďže tieto slučky dávajú vklad do korekcie náboja, existuje hrozba, že náboj môže závisieť od typu častice – napr. náboj (e^-) $\neq$ náboj (μ). **Experimentálne sa však závislosť náboja od typu častice nepozoruje.**

Priamym výpočtom diagramov (b), (c) a (d) je možné ukázať, že platí Wardova identita:

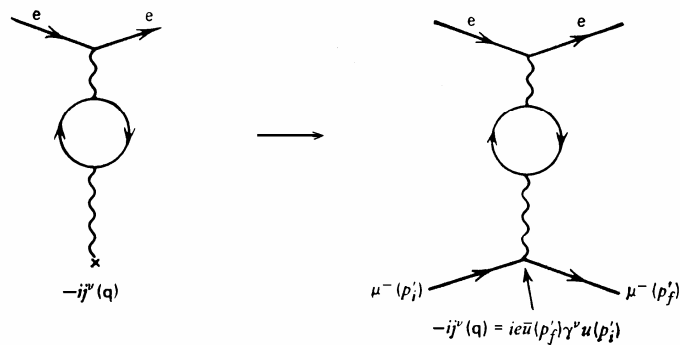
$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram (b)} + \frac{1}{2} \text{Diagram (c)} + \frac{1}{2} \text{Diagram (d)} \Big|_R = 0 \quad (30)
 \end{array}$$

Teda modifikácia náboja sa uskutočňuje len v dôsledku polarizácie vákua (diagram a).

Rozptyl $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ v priblížení e^4 .

Amplitúdu pre $e^-\mu^-$ v priblížení e^4 dostaneme z amplitúdy pre e^-Ze -rozptylu zámenou

$$-ij^\mu(q) \equiv (Ze, 0) \rightarrow ie\bar{u}_f(p')\gamma^\mu u_i(p)$$



obr. 5: Prechod od e^-Ze -rozptylu k $e\mu$ -rozptylu

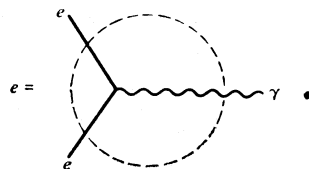
Ak zahrnieme do $e\mu$ -rozptylu e^4 -diagramy potom musíme pracovať s renormalizovaným nábojom e_R . Korekcia k propagátoru je rovnaká ako v prípade e^-Ze -rozptylu:

$$\frac{(-i)}{q^2} \cdot I_{\mu\nu} \cdot \frac{(-i)}{q^2}$$

A bude rovnaká vo všetkých procesoch s fotónom ako výmennou časticou. Pri $e\mu$ -rozptylu však existujú aj iné e^4 -diagramy, ktoré je treba brať do úvahy.

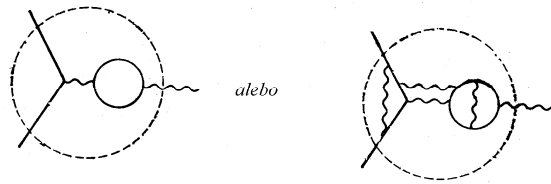
Renormalizácia

Náboj súvisí s fotón-elektrónovou interakciou – charakterizuje jej silu:



Obr. 6: Fotón - elektrónová väzba je charakterizovaná nábojom e

Avšak $e\gamma$ interakcia ide aj cez diagramy ako



Obr. 7: Príklady $e\gamma$ interakcií, ktoré sú charakterizované zložitejšími diagramami

V coulombovskom experimente sa náboj meria ako príspevok všetkých diagramov. Náboj v diagrame na Obr. 6 budeme označovať ako náboj holý. Tento náboj nie je totožný s nábojom meraným v experimente pri danej prenesenej hybnosti. Vzťah náboja meraného v experimente (e) a holého náboja (e_0) je daný diagramovým vyjadrením daným na Obr.8:

Obr. 8: vzťah náboja e meraného v experimente pri $Q^2 = \mu^2$ a holého náboja e_0

Vyjadrenie experimentálneho náboja cez holý predpokladá, že experiment sa uskutočňuje pri odovzdanej hybnosti $q^2 = -Q^2 = -\mu^2$.

Poznámka. Je dôležité si uvedomiť, že pri meraní náboja v coulombovskom experimente experimentátor predpokladá, že proces je popísaný jedno-fotónovou amplitúdou A_0 (diagram na ľavej strane Obr.8), v ktorej „sedí“ experimentálny náboj – účinný prierez procesu je úmerný štvrtej mocnine experimentálneho náboja:

$$\sigma_{coul} = e^4 k_{flux} |A_0|^2 k_{ph.space} = e^4 \times F_{kin},$$

keďže faktor vstupného toku (k_{flux}) a faktor fázového priestoru ($k_{ph.space}$) sú známe veličiny zmeraním účinného procesu zmeriame náboj. Takto zmeraný náboj predstavuje sebou efektívny náboj, lebo pri jeho extrakcii z účinného prierezu experimentátor neberie do úvahy vyššie rády.

Ak sa vo vzťahu medzi e a e_0 obmedzíme na jedno-slučkové priblíženie dostávame:

$$e^2 = e_0^2 [1 - I(q^2 = -\mu^2) + O(e_0^4)] \quad (31)$$

alebo po odmocnení (na $I(q^2)$ sa dívame ako na malú veličinu)

$$e = e_0 \left[1 - \frac{1}{2} I(q^2 = -\mu^2) + O(e_0^4) \right] \quad (32)$$

Vyjadrené diagramom:

Obr. 9: vzťah medzi experimentálnym a holým nábojom v 1-slučkovom priblížení.

Obrátený vzťah v jedno - slučkovom priblížení:

$$e_0 = e \left[1 + \frac{1}{2} I(q^2 = -\mu^2) + O(e^4) \right] \quad (33)$$

Obr. 10: Holý vs. experimentálny náboj v 1-slučkovom priblížení

Máme určený vzťah medzi e (experimentálne určeným nábojom pri prenesenej hybnosti μ) a e_0 (holý náboj). Vyjadrime si teraz amplitúdu $e\mu$ -rozptylu ($M(e_0)$) pre ľubovoľný kvadrát prenesenej hybnosti Q^2 použijúc holý náboj e_0 .

Obr. 11: Amplituda rozptylu vyjadrená cez holý náboj

Ak vyjadríme e_0 cez e dostaneme amplitúdu $e\mu$ -rozptylu ($M(e^2)$) vyjadrenú cez experimentálny náboj pri fixovanom $Q^2 = \mu^2$:

Obr. 12: Amplitúda $e\mu$ -rozptylu vyjadrená cez experimentálny náboj získaný prenesenej hybnosti μ^2 v druhom ráde poruchovej teórie.

Vzhľadom na to, že pri prechode od $M(e_0^2)$ k $M(e^2)$ sme v rámci jednoslučkového priblíženia nič nevyhodili musí platiť:

$$M(e^2) = M(e_0^2). \quad (34)$$

Pritom člen rádu e^4 pozostáva z dvoch častí – jedna z nich obsahuje slučku pri Q^2 a druhá pri μ^2 . Pritom platí (v priblížení veľkých prenesených hybností):

$$\left[\text{diagram with loop at } Q^2 - \text{diagram with loop at } \mu^2 \right] \sim \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{M^2}{Q^2} - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{M^2}{\mu^2} = \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{\mu^2}{Q^2} \quad (35)$$

Teda rozdiel oboch častí je konečný! A vidíme, že rozvoj amplitúdy $e\mu$ -rozptylu do radu podľa mocnín experimentálneho náboja e dáva konečné koeficienty pri mocninách e (na rozdiel od rozvoja podľa mocnín holého náboja).

Voľný parameter μ majúci rozmer hmotnosti (prenesená hybnosť, pri ktorej je určený náboj) vzniká ako dôsledok renormalizácie náboja.

Rôzny výber škály μ vedie k rôznym rozvojom amplitúdy M . Avšak $|M|^2$ je veličina až na konštantu rovná účinnému prierezu, preto nemôže závisieť od výberu škály μ . Táto nezávislosť je vyjadrená rovnicou renorm-grupy:

$$\mu \frac{dM}{d\mu} = \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial e}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial e} \right) M = 0 \quad (36)$$

Teda explicitná závislosť M od μ je kompenzovaná závislosťou e od μ .

Bežiaca väzbová konštanta. Tienenie náboja v QED

Efekt modifikácie náboja je možné určiť vo všetkých rádoch poruchovej teórie, čo je možné vyjadriť pomocou diagramov:

$$\text{diagram with } e \text{ and loop} = \text{diagram with } e_0 \text{ and loop} \left\{ 1 - \text{diagram with loop} + \left[\text{diagram with loop} \right]^2 \dots \right\}$$

obr. 13: Náboj e pri danom Q^2 vyjadrený cez holý náboj e^0 zahrnutím všetkých rádoch.

Vyššie uvedený geometrický rád je možné presumovať:

$$\begin{array}{c} e \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \\ \diagdown \quad \diagup \\ e \end{array} = \begin{array}{c} e_0 \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \\ \diagdown \quad \diagup \\ e_0 \end{array} \left\{ \frac{1}{1 + \text{loop}} \right\} \equiv e^2(Q^2) = e_0^2 \left[\frac{1}{1 + I(-Q^2)} \right] \quad (37)$$

Tento vzťah znamená, že experimentálne určený náboj závisí od hodnoty kvadrátu prenesenej hybnosti Q^2 , pri ktorej je tento náboj určený. Veličina $\alpha(Q^2) = \frac{e^2(Q^2)}{4\pi}$ sa nazýva bežiaci väzbová konštanta a v limite pre veľké Q^2 :

$$I(-Q^2) \approx -\frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{M^2} \quad (38)$$

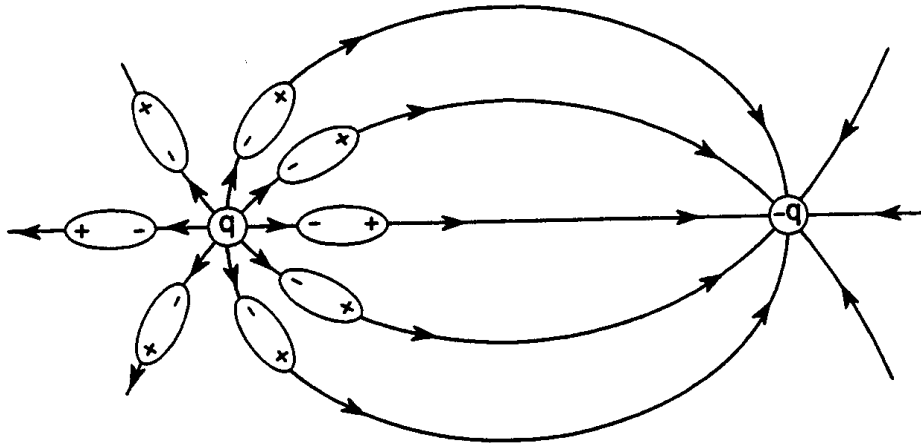
dostávame:

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{M^2}} \quad (39)$$

Ak zavedieme renormalizačnú hmotnosť μ (t.j. referenčnú odovzdanú hybnosť, pri ktorej bol určený náboj) a vyjadríme α_0 cez $\alpha(\mu^2)$ dostávame:

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 - \frac{\alpha(\mu^2)}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu^2}} \quad (40)$$

Pri vyjadrení $\alpha(Q^2)$ sme sa zbavili veličiny M , avšak zaviedli sme škálu μ .



Obr. 14: Efekt e^-e^+ slučiek pri interakcii 2 nábojov.

Bežiacia väzbová konštanta $\alpha(Q^2)$ popisuje závislosť efektívneho náboja od vzdialenosti ($1/Q$) medzi nabitými časticami. S rastúcim Q^2 fotón „vidí“ stále väčší náboj. Zo vzťahu (39) je vidieť, že holý náboj je náboj určený pri „hraničnej“ odovzdanej hybnosti M (resp. pri minimálne možnej vzdialenosti medzi nábojmi $1/M$). Ak ideme s $M \rightarrow \infty$ potom holý náboj sa stáva nekonečným (ako je vidieť z (39)).

Poznámka. Brali sme do úvahy len e^-e^+ –slučky, avšak pri veľkých Q^2 vklad budú dávať aj iné slučky – slučky od párov $\mu^-\mu^+$, $q\bar{q}$, etc.

Väzbová konštanta silných interakcií

Pred prechodom k väzbovej konštante silných interakcií je treba prediskutovať otázku reálnych a virtuálnych fotónov.

Reálne a virtuálne fotóny.

Amplitúda rozptylu v $e\mu$ -procesе (vo všeobecnosti v procesе rozptylu častíc A a B) je :

$$\begin{aligned} T_{fi} &= -i \int j_\mu^A(x) \cdot \left(\frac{-g_{\mu\nu}}{q^2} \right) \cdot j_\nu^B(x) \cdot d^4x \\ &= -i \int \left(\underbrace{\frac{j_1^A j_1^B + j_2^A j_2^B}{q^2}}_{\text{priechny fotón}} + \underbrace{\frac{j_3^A j_3^B - j_0^A j_0^B}{q^2}}_{\text{skalárny fotón}} \right) d^4x \end{aligned} \quad (41)$$

Ak vyberieme súradnú sústavu tak, že $\vec{q}$ (prenesená hybnosť) je v smere osi z , t.j.

$q^\mu = (q^0, 0, 0, |\vec{q}|)$, potom pre rovnicu kontinuity platí:

$$q^\mu j_\mu = q^0 j_0 - |\vec{q}| j_3 = 0 \quad (42)$$

Ak výmenný fotón je temer reálny ($q^0 \approx |\vec{q}|$), potom $j_0 \approx j_3$ a vklady pozdĺžnych a skalárnych fotónov sa vzájomne rušia. Pre skutočne virtuálny fotón:

$$\begin{aligned} j_3 &= \frac{q_0}{|\vec{q}|} j_0 \\ T_{fi} &= -i \int \left(\underbrace{\frac{j_1^A j_1^B + j_2^A j_2^B}{q^2}}_T + \underbrace{\frac{j_0^A j_0^B}{|\vec{q}|^2}}_C \right) d^4x \end{aligned} \quad (43)$$

T: šírenie virtuálneho fotónov stavoch s priečnou polarizáciou (času-podobný propagátor).

C: Popisuje okamžitú coulombovskú interakciu medzi nábojmi častíc A a B.

Použijúc spätnú fourierovú transformáciu pre časť C:

$$\frac{1}{|\vec{q}|^2} = \int d^3 \vec{x} \cdot \exp(i\vec{q} \cdot \vec{x}) \cdot \frac{1}{4\pi|\vec{x}|}, \quad (44)$$

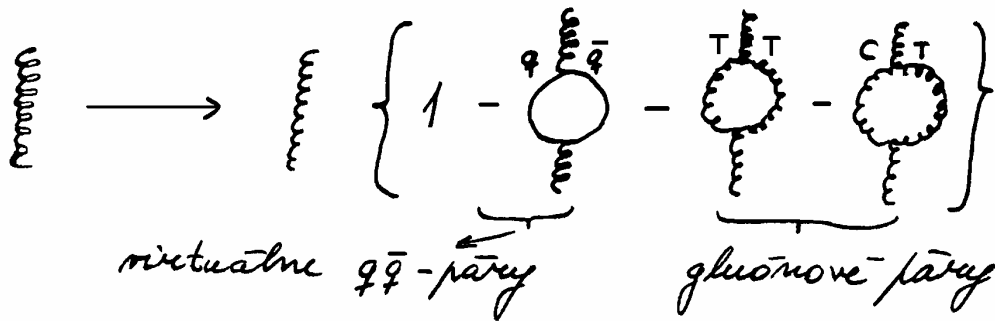
vidíme, že C nezávisí od času, čo vedie k :

$$T_{fi}^{coul} = -i \int dt \int d^3 \vec{x}_1 \int d^3 \vec{x}_2 \frac{j_0^A(t, \vec{x}_1) j_0^B(t, \vec{x}_2)}{4\pi|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|} \quad (45)$$

Teda náboje častíc A a B interagujú bez oneskorenia v čase t.

Bežiaca väzbová konštanta pre QCD

Princíp určenia väzbovej konštanty silných interakcii $\alpha_s(Q^2)$ od Q^2 je rovnaký ako v QED, avšak výsledok sa diametrálne líši. V 2. ráde (pre QCD) máme:



Obr. 15: Efekt virtuálnych párov (gluónov a kvarkov) v QCD, T je priečný gluón a C je „coulombovský“ gluón..

Uvedené diagramy dávajú pri $\ln Q^2 / \mu^2$ vo vzťahu pre väzbovú konštantu (vid'. (40)) koeficient:

$$\frac{\alpha_s(\mu^2)}{4\pi} \left(\underbrace{-\frac{2}{3}n_f}_{q\bar{q}} \underbrace{-\frac{5}{11}}_{TT} \underbrace{+\frac{16}{3}}_{CT} \right) \quad (46)$$

Kde n_f je počet kvarkových vôní (flavourů).

Poznámka. V QED $n_f = 1$ (iba 1 pár $e^+ e^-$) príslušný koeficient je $-4/3$, lebo

definície α a α_s sa líšia faktorom 2 (dané historicky).

Vo všeobecnosti je možné dokázať teorému:

Ľubovoľné stavy, ktoré môžu vznikať pri času-podobnom propagátore vedú k tieneniu náboja, teda k zápornému koeficientu pri $\ln(Q^2/\mu^2)$. Coulombovské gluóny (priestoru-podobný propagátor) vedú k opačnému javu.

Väzbová konštanta pre veľké Q^2 sa dá vyjadriť (v súlade so vz.(40)) nasledovne:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + \frac{\alpha_s(\mu^2)}{4\pi} \left(11 - \frac{2}{3}n_f\right) \ln \frac{Q^2}{\mu^2}} \quad (47)$$

$\alpha_s(Q^2)$ klesá s rastúcim Q^2 – stáva sa malou na malých vzdialenostiach

($Q^2 \rightarrow \infty \Rightarrow \alpha_s(Q^2) \rightarrow 0$ asymptotická sloboda).

Pri malých Q^2 sa α_s stáva veľkou – položíme $Q^2 = \Lambda^2$ pre

$$1 + \frac{\alpha_s(\mu^2)}{4\pi} \left(11 - \frac{2}{3}n_f\right) \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} = 0 \Rightarrow \alpha_s(\mu^2) = - \frac{4\pi}{\left(11 - \frac{2}{3}n_f\right) \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2}} \quad (48)$$

Keď $\alpha_s(\mu^2)$ dosadíme do výrazu pre $\alpha_s(Q^2)$ (47) dostávame:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{\left(11 - \frac{2}{3}n_f\right) \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}} \quad (49)$$

odkiaľ je vidieť, že pre veľké Q^2 ($Q^2 \gg \Lambda^2$) $\alpha_s(Q^2)$ je malá ($\alpha_s(Q^2) \rightarrow 0$)

a poruchová teória je aplikovateľná, zatiaľčo pre malé Q^2 ($Q^2 \approx \Lambda^2$) väzbová

konštanta $\alpha_s(\mu^2)$ je veľká a poruchový prístup sa nedá použiť. Pre veľké $\alpha_s(\mu^2)$ je sila

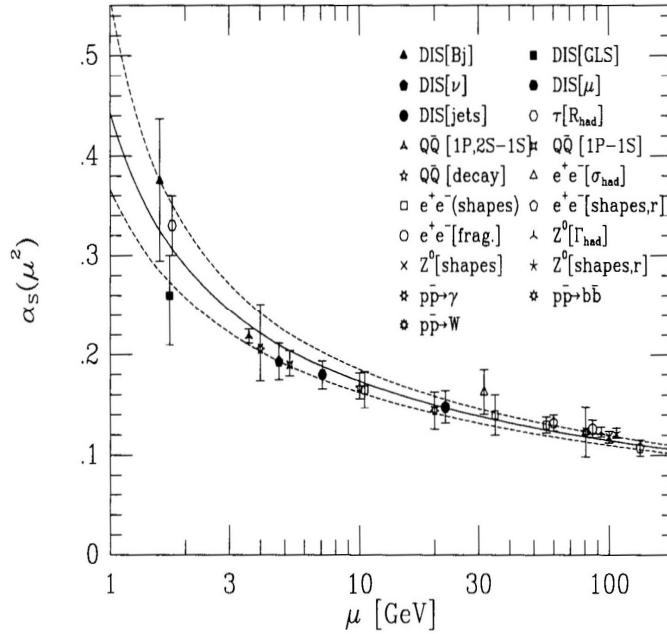
väzby tak veľká, že sa kvarky a gluóny zjednocujú do klasterov a vytvárajú hadróny

(uväznenie (confinement) kvarkov). Veličina Λ sa obyčajne označuje ako Λ_{QCD}

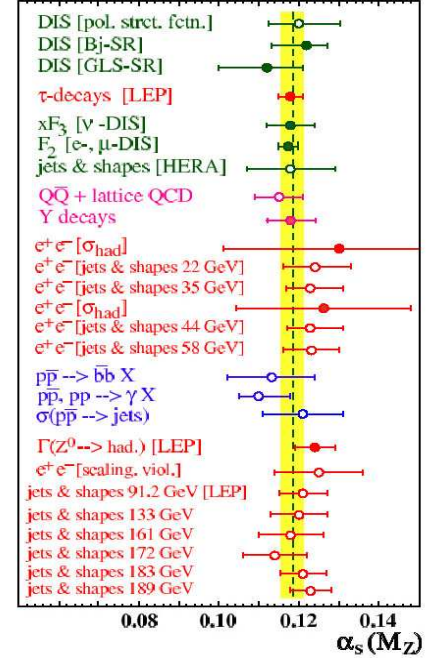
a predstavuje sebou voľný parameter teórie. Experimentálne merania väzbovej konštanty

silných interakcií sú ukázané na Obr. 16 a 17. Na prvom z nich (Obr.16) je ukázaná

závislosť α_s prenesenej hybnosti μ , zatiaľčo na druhom (Obr.17) sú ukázané merania α_s pri hmotnosti Z-bozónu ($\mu=M_Z$).



Obr. 16: Väzbová konštanta silných interakcií ako funkcia prenesenej hybnosti .



Obr. 17: Väzbová konštanta silných interakcií pri M_Z

Z merania väzbovej konštanty silných interakcií pre Λ_{QCD} experiment dáva:

$$\Lambda_{QCD}^{(4)} = 234 \pm 26 \pm 50 \text{ MeV}$$

$$\Lambda_{QCD}^{(5)} = 209 \left\{ \begin{array}{l} +39 \\ -33 \end{array} \right. \text{ MeV}$$

Index (n) v $\Lambda^{(n)}$ znamená efektívny počet kvarkových flavorov zúčastňujúcich sa študovaného procesu.

Doplnok A.

Pri výpočte veličiny $I_{\mu\nu}(q^2)$ je treba využiť nasledovné vlastnosti stôp súčinov γ -mátíc:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu} \\ \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= 4[g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}] \\ \text{Tr}(\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= 4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \\ \text{Tr}(\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

a komutačné vzťahy ($\hat{a} \equiv a_\mu \gamma^\mu$) :

$$\begin{aligned} \hat{a}\hat{b} &= 2(ab) - \hat{b}\hat{a} \\ \hat{a}\gamma^\mu &= 2a^\mu - \gamma^\mu \hat{a} \\ \hat{a}\gamma^5 &= -\gamma^5 \hat{a} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Doplnok B: O výpočte divergentných diagramov.

Pri výpočte divergentných diagramov sa vychádza z výpočtu integrálu J_2 :

$$J_2(p, \alpha) = \int \frac{dk}{(k^2 - 2pk + \alpha)^2} = i \int_0^M dk \cdot k^3 \int_0^\pi d\chi \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\sin \vartheta \cdot \sin^2 \chi}{(k^2 - 2pk + \alpha)^2} = i\pi^2 \left(\ln \frac{M^2}{\alpha - p^2} - 1 \right)_{M \rightarrow \infty} \quad (\text{B1})$$

Integrovaním $J_2(p, \alpha)$ po α dostávame:

$$J(p, \alpha) = \int \frac{dk}{k^2 - 2pk + \alpha} = i\pi^2 \left[M^2 - \frac{1}{2} p^2 + (p^2 - \alpha) \ln \frac{M^2}{\alpha - p^2} \right]_{M \rightarrow \infty} \quad (\text{B2})$$

Diferencovaním $J(p, \alpha)$ po α a p_μ dostávame:

$$\int \frac{dk \cdot k_\mu}{(k^2 - 2pk + \alpha)^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial J(p, \alpha)}{\partial p_\mu} = i\pi^2 p_\mu \left(\ln \frac{M^2}{\alpha - p^2} - \frac{3}{2} \right) \quad (\text{B3})$$

$$\int \frac{dk}{(k^2 - 2pk + \alpha)^3} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J(p, \alpha)}{\partial^2 \alpha^2} = i\pi^2 \frac{1}{\alpha - p^2} \quad (\text{B4})$$

$$\int \frac{dk \cdot k_\mu}{(k^2 - 2pk + \alpha)^3} = -\frac{1}{4} \frac{\partial^2 J(p, \alpha)}{\partial p_\mu \partial \alpha} = i\frac{\pi^2}{2} \frac{p_\mu}{\alpha - p^2} \quad (\text{B5})$$

$$\int \frac{dk}{(k^2 - 2pk + \alpha)^4} = -\frac{1}{6} \frac{\partial^3 J(p, \alpha)}{\partial \alpha^3} = i\frac{\pi^2}{6} \frac{1}{(\alpha - p^2)^2} \quad (\text{B6})$$

$$\int \frac{dk \cdot k_\mu}{(k^2 - 2pk + \alpha)^4} = \frac{1}{12} \frac{\partial^3 J(p, \alpha)}{\partial p_\mu \partial \alpha^2} = i\frac{\pi^2}{6} \frac{p_\mu}{(\alpha - p^2)^2} \quad (\text{B7})$$

$$\int \frac{dk \cdot k_\mu k_\nu}{(k^2 - 2pk + \alpha)^2} = i\pi^2 \left\{ \frac{g_{\mu\nu}}{2} \left(\frac{M^2}{2} - \frac{5}{6} p^2 + \frac{\alpha}{2} + (p^2 - \alpha) \ln \frac{M^2}{\alpha - p^2} \right) + \left(\ln \frac{M^2}{\alpha - p^2} - \frac{11}{6} \right) p_\mu p_\nu \right\} \quad (\text{B8})$$

$$\int \frac{dk \cdot k_\mu k_\nu}{(k^2 - 2pk + \alpha)^3} = \frac{1}{12} \frac{\partial^2 J(p, \alpha)}{\partial p_\mu \partial p_\nu} = i\frac{\pi^2}{4} \left[g_{\mu\nu} \left(\ln \frac{M^2}{\alpha - p^2} \right) + \frac{2p_\mu p_\nu}{\alpha - p^2} \right] \quad (\text{B9})$$