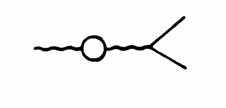
O divergenciách v QED.

Ver.: 23. 11. 2007

Zhrnutie $e^{-}Ze$-rozptylu v druhom priblížení:

1) diagram pre polarizáciu vákua



modifikuje propagátor fotónu na:

$$iD_{\mu\nu}(q^2) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\alpha}}{q^2} \cdot I^{\alpha\beta}(q^2) \cdot \frac{-ig_{\beta\nu}}{q^2} \tag{1}$$

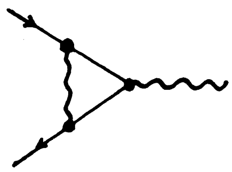
- Vlastná energia fotónu $I^{\alpha\beta}(q^2)$ diverguje logaritmický.
- Problém divergencie sme vzriešili tak, že sme $I^{\alpha\beta}(q^2)$ najprv regularizovali:

$\int_0^\infty dp \cdots \quad \to \quad \int_0^M dp \cdots$ a potom sme renormalizovali náboj, t.j. urobili zámenu:

$e \to e_R = e\left(1 - \frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{M^2}{m^2}\right)^{1/2}$ a e_R sme prehlásili za náboj pozorovaný v experimente.

- Pracujúc s e_R sme ukázali, že efekt virtuálnych párov $e^- e^+$ modifikuje potenciál medzi e^- a $Z\,e$ a fyzikálnym prejavom týchto virtuálnych párov v atóme vodíka je Lambov posuv.

2) Diagram pre vertexovú korekciu



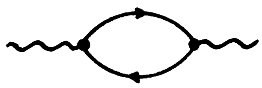
modifikuje štruktúru elektrónového toku $(-e\bar{u}_f\gamma^\mu u_i)$:

$\gamma^\mu \to \Gamma^\mu = \gamma^\mu + \Lambda^\mu$, čo pre malé q^2 vedie k:

$$-e\bar{u}_f \left\{ \underbrace{\gamma^\mu [1+\cdots]}_{\text{modifikuje náboj}} - \underbrace{\left[\frac{\alpha}{3\pi}\frac{q^2}{m^2}\frac{i\sigma_{\mu\nu}}{2m}q^\nu\right]}_{\text{vedie k anomálnemu mag. momentu}} \right\} u_i \tag{2}$$

Vo všeobecnosti 2. rád poruchovej teórie vedie k nasledovným divergentným diagramom:

1) Vlastná energia fotónu (polarizácia vákua) položiac $I^{\mu\nu} = -i\Pi^{\mu\nu}$:

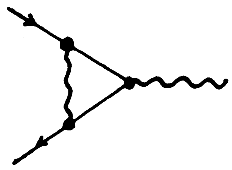


$$-i\Pi^{\mu\nu}(q^2) = -(ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr\left[\gamma^{\mu} \cdot \frac{i\left(\hat{k}+m\right)}{k^2-m^2} \cdot \gamma^{\nu} \cdot \frac{i\left(\hat{k}-\hat{q}+m\right)}{(k-q)^2-m^2}\right] \quad (3)$$

2) Vlastná energia elektrónu:

$$i\Sigma(p^2) = -(ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \cdot \gamma^{\mu} \cdot \frac{i\left(\hat{p}-\hat{k}+m\right)}{(p-k)^2-m^2} \cdot \gamma^{\nu} \cdot \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2} \quad (4)$$

2) Vertexová korekcia:



$$ie\Lambda^{\mu}(p,q,p+q) = (ie)^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{-ig_{\rho\sigma}}{(k+p)^2}\right) \left[\gamma^{\rho} \cdot \frac{i\left(\hat{p}-\hat{k}+m\right)}{(p-q)^2-m^2} \cdot \gamma^{\mu} \cdot \frac{i\left(\hat{k}+m\right)}{k^2-m^2} \gamma^{\sigma}\right] \quad (5)$$

Uvedené integrály obsahujú divergencie, ktoré sa odstraňujú procedúrou renormalizácie. Ukázali sme si to v prípade náboja. Úplné odstránenie divergencií v QED si vyžaduje renormalizovať aj hmotnosť a vlnovú funkciu častice.

Rozmerová regularizácia

Doteraz bola základom renormalizácie tzv. „cutoff“ regularizácia.V súčasnosti sa stalo konvenčným používať tzv. ***dimenzionálnu regularizácia***, ktorá spočíva v tom, že divergentné integrály sa počítajú v $D=4\pm 2\varepsilon$ ($D=4\pm\varepsilon$)-dimenziách. Ukážeme si to na prípade polariácie vákua, t.j. integrálu $I^{\mu\nu}=-i\Pi^{\mu\nu}$.

$$\Pi^{\mu\nu}=ie^2\left\{\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{Tr\left(\gamma^\mu(\hat{k}+m)\gamma^\nu(\hat{k}-\hat{q}+m)\right)}{\left(k^2-m^2\right)\left((k-q)^2-m^2\right)}\right\} \tag{6}$$

Najprv niekoľko slov o technike výpočtu divergentných integrálov.

Technika výpočtu divergentných integrálov.

Počítanie stôp γ-matíc. Pre výpočet divergentných diagramov typu (6) je potrebné najprv spočítať stôp γ-matíc. Konkrétne pri výpočte veličiny $\Pi_{\mu\nu}(q^2)$ je treba využiť nasledovné vlastnosti stôp súčinov γ-matíc:

$$\begin{aligned}Tr\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\right) &= 4g^{\mu\nu}\\ Tr\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\right) &= 4\left[g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}+g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}-g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\right]\\ Tr\left(\underbrace{\gamma^\mu\cdots\gamma^\sigma}_{odd}\right) &=0\end{aligned} \tag{7}$$

Podrobnejšie o počítaní stôp matíc je možné si prečítať v Doplnku ***A.***

Technika výpočtu divergentných integrálov je založená na niekoľkých trikoch.

Feynmanov trik. Je ľahké dokázať (viď. Doplnok B – (B3)), že platí:

$$\frac{1}{\left(k^2-m^2\right)\left((k-q)^2-m^2\right)}=\int_0^1 dx\frac{1}{\left(k^2-2k\cdot qx+q^2x-m^2\right)^2}=\int_0^1 dx\frac{1}{\left(k'^2-M^2\right)^2} \tag{8}$$

kde $M^2=x^2q^2-xq^2+m^2$ a $k'=k-qx$.

Prechod k Euklidovmu integrálu v D rozmeroch. Typický výraz, s ktorým máme do činenia pri výpočtoch 2. rádu poruchovej teórie je:

$$I\left(M^2,\alpha\right)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{\left(k^2-M^2\right)^{\alpha}} \tag{9}$$

Urobíme regularizáciu uvedeného integrálu tak, že prejdeme k integrácii podintegrálneho výrazu v D rozmeroch. Podintegrálna funkcia je analytickou funkciou až na póly ($\pm E=\pm\sqrt{\vec{k}^2+m^2}$) v premennej k_0. Problém pólov sme vyriešili tak (kapitola 7), že sme prešli do komplexnej roviny k_0, póly sme posunuli: $\pm E\to\pm\left(E-i\varepsilon\right)$ a urobili zámenu: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}dk^0\cdots\xrightarrow{\pm E\to\pm(E-i\varepsilon)}\int\limits_{C}dk^0\cdots$,

kde $C=\left(-\infty,\infty\right)\cup K$, $K\equiv$ je polkružnica v dolnej resp. hornej polrovine komplexnej roviny k_0 .

Keďže $\int\limits_{K}dk^0\cdots=0 \quad\Rightarrow\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}dk^0\cdots=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{C}dk^0\cdots$. V dôsledku analytičnosti podintegrálnej funkcie kontur C môžeme deformovať: $C\to C'\equiv\left(-i\infty,i\infty\right)\cup K'$, kde K'je polkružnica v prednej resp. zadnej polrovine. Vychádzajúc z $\int\limits_{C}dk^0\cdots=\int\limits_{C'}dk^0\cdots$ môžeme písať:

$$I_D\left(M^2,\alpha\right)=\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{dk^0}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dk^1}{2\pi}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dk^{D-1}}{2\pi}\frac{1}{\left(k^2-M^2\right)^{\alpha}}$$

Tento integrál môžeme pretransformovať na euklidovský integral zámenou:

$$k^0=ik_E^0\,,\quad \vec{k}=\vec{k}_E\,,\quad d^Dk=id^Dk_E\quad\Rightarrow k^2=-k_E^2=-\left(\left(k_E^0\right)^2+\cdots+\left(k_E^{D-1}\right)^2\right),$$
$$\left(-i\infty,\,i\infty\right)\;\to\;\left(-\infty,\infty\right)$$

čo dáva:

$$I_D\left(M^2,\alpha\right)=\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\frac{1}{\left(k^2-M^2\right)^{\alpha}}=(-1)^{\alpha}i\int\frac{d^Dk_E}{(2\pi)^D}\frac{1}{\left(k_E^2+M^2\right)^{\alpha}} \tag{10}$$

Integrál $I_D\,(\,M^2\,)$ je konečný pre $D\neq 4$. Myšlienka je nasledovná: priradiť formálny výraz $I_D(M^2)$ pre hodnotu $D\neq 4$ a vykonať všetky manipulácie – regularizovať divergencie, renormalizovať polia a väzbové konštanty a potom prejsť späť k $D=4$.

Master formula. Výpočet (10) možeme realizovať nasledovne (používame euklidovu metriku – index „*E*“ vynechávame):

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{\left(k^2+M^2\right)} = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int_0^\infty dz\, e^{-z\left(k^2+M^2\right)} = \int_0^\infty dz\, e^{-zM^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-zk^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^D} \int_0^\infty dz\, e^{-zM^2} \left(\frac{\pi}{z}\right)^{D/2} = \frac{\left(M^2\right)^{\frac{D}{2}-1}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \int_0^\infty dt\, e^{-t} t^{-\frac{D}{2}} = \frac{\Gamma(1-D/2)}{(4\pi)^{D/2}} \left(M^2\right)^{\frac{D}{2}-1} \tag{11}$$

Ak vzťah (11) derivujeme podľa M^2 $(\alpha-1)$-krát dostaneme tzv. „master formulu“:

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{\left(k^2+M^2\right)^\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha-D/2)}{(4\pi)^{D/2}\,\Gamma(\alpha)} \left(M^2\right)^{\frac{D}{2}-\alpha} \tag{12}$$

Poznámka. *Vo všeobecnosti je možné ukázať, že na základe integrálu* $I_D\left(M^2,\alpha\right)$ *je možné vypočítať všetky integrály potrebné na počítanie tzv. n-bodových funkcií - viď doplnok B.*

Výraz (6) pre $\Pi^{\mu\nu}$ si upravíme tak, že urobíme Feynmanov trik a zámenu $k' = k - qx$

$$\Pi^{\mu\nu} = ie^2 \left\{ \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{Tr\left(\gamma^\mu(\hat{k}'+\hat{q}x+m)\gamma^\nu(\hat{k}'-\hat{q}(1-x)+m)\right)}{\left\{\left[(k'+qx)^2-m^2\right](1-x)+\left[k'-q(1-x)\right]x\right\}^2} \right\} \tag{13}$$

Členy úmerné k' nedajú vklad do integrálu (13), lebo predstavujú nepárna funkciu premennej integrovania. Menovateľ podintegrálneho výrazu sa dá upraviť nasledovne:

$$\{\cdots\} = k'^2 + q^2 x(1-x) - m^2 \tag{14a}$$

a čitateľ v tomto integrále je:

$$Tr[\cdots] = \left[(k'_\alpha+q_\alpha x)(k'_\beta-q_\beta(1-x))\right] Tr\left(\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta\right) + m^2 Tr\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[k'_\alpha k'_\beta - x(1-x) q_\alpha q_\beta\right] 4\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} + g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\right) + m^2 4 g^{\mu\nu} = \tag{14b}$$

$$= 4\left[2k'^\mu k'^\nu - 2\left(q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu}q^2\right)x(1-x) - g^{\mu\nu}\left(k'^2 + q^2 x(1-x) - m^2\right)\right]$$

Kde sme využili vlastnosti stôp γ-matíc (7) a „⇒“ znamená, že sme z výrazu vynechali členy úmerné k', ktoré nedajú vklad do integrálu.

Ak urobíme zámenu $k' \to k$ a položíme $M^2 = m^2 - q^2 x(1-x)$ pre výraz (13) máme:

$$\Pi^{\mu\nu} = 4ie^2 \left\{ \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\frac{2k^\mu k^\nu}{\left(k^2 - M^2\right)^2} - \frac{2\left(q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} q^2\right) x(1-x)}{\left(k^2 - M^2\right)^2} - \frac{g^{\mu\nu}}{k^2 - M^2} \right] \right\} \tag{15}$$

Integrál (15) riešime prechodom do *D*-rozmerného priestoru a nasledným použitím „master formuly" a jej modifikácie (doplnok B, vz. B7-10) :

$$\int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{2k^\mu k^\nu}{\left(k^2 - M^2\right)^2} = -ig^{\mu\nu} \frac{\Gamma(1 - D/2)}{(4\pi)^{D/2}} \left(M^2\right)^{\frac{D}{2}-1}$$

$$\int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{1}{\left(k^2 - M^2\right)^2} = -i \frac{\Gamma(2 - D/2)}{(4\pi)^{D/2}} \left(M^2\right)^{\frac{D}{2}-2} \tag{16}$$

$$\int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{g^{\mu\nu}}{k^2 - M^2} = -ig^{\mu\nu} \frac{\Gamma(1 - D/2)}{(4\pi)^{D/2}} \left(M^2\right)^{\frac{D}{2}-1}$$

Zo (16) vyplýva, že prvý a tretí člen vo výraze (15) sa vzájomne rušia a teda platí

$$\Pi^{\mu\nu} = 8e^2 \left(q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} q^2\right) \mu^{4-D} \frac{\Gamma\left(2 - D/2\right)}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^1 dx\, x(1-x) \left(M^2\right)^{\frac{D}{2}-2} \tag{17}$$

Pri prechode do ***D***-rozmerného priestoru sme zaviedli (ľubovoľnú) škálu μ, ktorá má rozmer hybnosti a bola zavedená na to, aby náboj aj po prechode do ***D***-rozmerného priestoru zostal bezrozmerný (viď. Doplnok C). Položíme $D = 4 - \varepsilon$ a využijeme:

$$\Gamma\left(2 - D/2\right) = \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \approx \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + O(\varepsilon)$$

$$\left(M^2\right)^{-\frac{\varepsilon}{2}} \approx 1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln\left(M^2\right) = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln\left(m^2 - q^2 x(1-x)\right) \tag{18}$$

$$\frac{\mu^{4-D}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} = \frac{\left(4\pi\mu^2\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}}{(4\pi)^2} \approx \frac{1}{(4\pi)^2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln\left(4\pi\mu^2\right)\right)$$

kde $\gamma = 0.577\ldots$ je Eulerova konštanta.

Pre veličinu $\Pi^{\mu\nu}$ dostávame:

$$\Pi^{\mu\nu} = \frac{e^2}{2\pi^2}\left(q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu}q^2\right)\left(\frac{2}{\varepsilon}-\gamma\right)\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\ln\left(4\pi\mu^2\right)\right)\int_0^1 dx\, x(1-x)\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\ln\left(m^2-q^2x(1-x)\right)\right)$$

$$= \frac{e^2}{2\pi^2}\left(q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu}q^2\right)\left(\frac{2}{\varepsilon}-\gamma+\ln\left(4\pi\mu^2\right)\right)\left(\frac{1}{6}-\frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 dx\, x(1-x)\ln\left(m^2-q^2x(1-x)\right)\right)=$$

$$= \frac{e^2}{12\pi^2}\left(q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu}q^2\right)\left(\frac{2}{\varepsilon}-\gamma+\ln\left(4\pi\right)-\ln\frac{m^2}{\mu^2}-6\int_0^1 dx\, x(1-x)\ln\left(1-\frac{q^2}{m^2}x(1-x)\right)\right) \tag{19}$$

Člen úmerný $q^\mu q^\nu$ nedáva (po presumovaní) vklad do amplitúdy procesu v dôsledku zachovania prúdu ($j_\mu q^\mu=0$), preto si $\Pi^{\mu\nu}$ môžeme vyjadriť *:*

$$\Pi^{\mu\nu}\left(q^2\right) = -g^{\mu\nu}\Sigma^\gamma\left(q^2\right) = -g^{\mu\nu}q^2\Pi^\gamma\left(q^2\right) \tag{20}$$

kde pre priečnu vlastnú energiu fotónu dostávame:

$$\Sigma^\gamma = \frac{e^2}{12\pi^2}q^2\left(\frac{2}{\varepsilon}-\gamma+\ln\left(4\pi\right)-\ln\frac{m^2}{\mu^2}-6\int_0^1 dx\, x(1-x)\ln\left(1-\frac{q^2}{m^2}x(1-x)\right)\right) \tag{21}$$

Na základe vzťahov (1) a (20) pre propagátor fotónu v 1-slučkovom priblížení dostávame:

$$D^{\mu\nu}(q^2) = -i\frac{g^{\mu\nu}}{q^2}\left[1-\Pi^\gamma(q^2)\right] \quad , \qquad \Pi^\gamma(q^2) = \frac{\Sigma^\gamma(q^2)}{q^2} \tag{22}$$

Prípad malých prenesených hybností $/q^2/ \ll m^2$. V tomto prípade platí:

$\ln\left(1-\frac{q^2}{m^2}x(1-x)\right) \approx -\frac{q^2}{m^2}x(1-x)$ a pre korekciu k propagátoru dostávame

$$\Pi^\gamma \approx \frac{e^2}{12\pi^2}\left(\frac{2}{\varepsilon}-\gamma+\ln 4\pi-\ln\frac{m^2}{\mu^2}+6\frac{q^2}{m^2}\int_0^1 dx\, x^2(1-x)^2\right) \tag{23}$$

čo vedie k nasledovnej fotónovej polarizácii vákua:

$$\Pi^\gamma(q^2) = \frac{\alpha}{3\pi}\left(\frac{2}{\varepsilon}-\gamma+\ln 4\pi-\ln\frac{m^2}{\mu^2}+\frac{q^2}{5m^2}\right) \tag{24}$$

Prípad veľkých prenesených hybností $/q^2/ \gg m^2$.

$$\Pi^\gamma(q^2) = \frac{\alpha}{3\pi}\left(\frac{2}{\varepsilon}-\gamma+\ln 4\pi-\ln\frac{m^2}{\mu^2}+\ln\left(\frac{\left|q^2\right|}{m^2}\right)-\frac{5}{3}+i\pi\quad\theta(q^2)\right) \tag{25}$$

Využili sme: $\ln\frac{x(1-x)q^2+m^2}{m^2}\approx\ln\frac{x(1-x)q^2}{m^2}=\ln x(1-x)+\ln\frac{|q^2|}{m^2}+i\pi\theta(q^2)$

Vlastná energia elektrónu.

Pri výpočte vlastnej energie elektrónu prejdeme rovnako ako v prípade palarizácie vákua do ***D (= 4–ε)*** rozmerného priestoru:

$$-ie^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\cdot\gamma^\mu\cdot\frac{i(\hat{p}-\hat{k}+m)}{(p-k)^2-m^2}\cdot\gamma^\nu\cdot\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2}\to\Sigma(p)=-ie^2\mu^{4-D}\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\cdot\frac{\gamma^\mu(\hat{p}-\hat{k}+m)\gamma_\mu}{[(p-k)^2-m^2]k^2}$$

(26)

Po zavedení Feynmanovej premennej ***z*** (viď doplnok B2-3)

$$\Sigma(p)=-ie^2\int_0^1 dz\,\mu^{4-D}\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\cdot\frac{\gamma^\mu(\hat{p}-\hat{k}+m)\gamma_\mu}{[(p-k)^2z-m^2z+k^2(1-z)]^2}\tag{27}$$

Keď urobíme zámenu $k\to k'-pz$ a využijeme fakt, že v ***D***-rozmernom priestore platí:

$$\gamma^\mu\gamma_\mu=D,\ \gamma_\mu\hat{a}\gamma^\mu=(2-D)\hat{a}\tag{28}$$

Pre vlastnú energiu elektrónu dostávame:

$$\Sigma(p)=-i\frac{e^2}{(4\pi)^2}\left[\frac{1}{\varepsilon}(-\hat{p}+4m)+\hat{p}(1+\gamma)-2m(1+2\gamma)+2\int_0^1 dz\left(\hat{p}(1-z)-2m+\ln\left(\frac{M^2}{4\pi\mu^2}\right)\right)\right]$$

(29)

kde $M^2=m^2z-p^2z(1-z)$

Podrobnejšie o vlasnej energii elektrónu je v doplnku C.

Vertexová korekcia.

Analogickým postupom ako vyššie je možné vypočítať vertexovú korekciu:

$$-ie\mu^{2-D/2}\Lambda_\mu(p,q,p')=-(e\mu^{2-D/2})^3\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\frac{\gamma_\nu(\hat{p}'-\hat{k}+m)\gamma_\mu(\hat{p}-\hat{k}+m)\gamma^\nu}{k^2[(p-k)^2-m^2][(p'-k)^2-m^2]}\tag{30}$$

Použitím 2-parametrickej Fenmannovej formuly (viď. Doplnok B)

$$\frac{1}{abc}=2\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\frac{1}{[a(1-x-y)+bx+cy]^3}$$

dostávame

$$\Lambda_\mu(p,q,p') = i2e^2\mu^{4-D}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\gamma_\nu\left(\hat{p}'-\hat{k}+m\right)\gamma_\mu\left(\hat{p}-\hat{k}+m\right)\gamma^\nu}{\left[k^2-m^2(x+y)-2k(px+p'y)+p^2x+p'^2y\right]^3} \quad (31)$$

Po zavedení hybnosti $k' = k - px - p'y$ a po preoznačení premennej integrovania ($k' \to k$) máme:

$$\Lambda_\mu(p,q,p') = i2e^2\mu^{4-D}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \times$$
$$\times \frac{\gamma_\nu\left(\hat{p}'(1-y)-\hat{p}x-\hat{k}+m\right)\gamma_\mu\left(\hat{p}(1-x)-\hat{p}'y-\hat{k}+m\right)\gamma^\nu}{\left[k^2-m^2(x+y)+p^2x(1-x)+p'^2y(1-y)-2pp'xy\right]^3} \quad (32)$$

Výraz (32) obsahuje ako konečnú tak aj divergentnú časť (časť čitateľa, ktorá obsahuje k^2 diverguje) preto môžeme písať:

$$\Lambda_\mu = \Lambda_\mu^{(1)} + \Lambda_\mu^{(2)} \quad (33)$$

Kde divergentnú časť ($\Lambda_\mu^{(1)}$), použijúc (B10 – doplnok B), si môžeme vyjadriť v tvare

$$\Lambda_\mu(p,q,p') = \frac{e^2}{2}\mu^{4-D}\frac{\Gamma(2-D/2)}{(4\pi)^{D/2}}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy$$
$$\times \frac{\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\mu\gamma^\rho\gamma^\nu}{\left[m^2(x+y)-p^2x(1-x)-p'^2y(1-y)+2pp'xy\right]^{2-D/2}} \quad (34)$$

Kedže platí

$$\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\mu\gamma^\rho\gamma^\nu = (2-D)^2\gamma_\mu \quad (35)$$

a po vyjadrení $D=4-2\varepsilon$ pre divergentnú časť vertexovej korekcie dostávame:

$$\Lambda_\mu^{(1)}(p,q,p') = \frac{e^2}{(4\pi)^2\varepsilon}\gamma_\mu + \Lambda_\mu^{(1,\,finite)}(p,q,p') \quad (36)$$

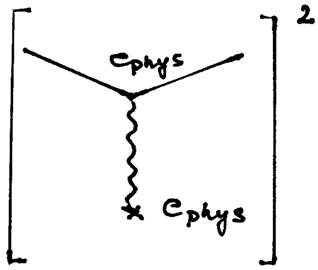
Konvergentná časť Λ_μ neobsahuje k v čitateli a kedže konverguje môžeme položiť $D=4$ a preintegrovať (po k), čo dáva

$$\Lambda_\mu^{(2)}(p,q,p') = \frac{e^2}{(4\pi)^2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{\gamma_\nu\left(\hat{p}'(1-y)-\hat{p}x+m\right)\gamma_\mu\left(\hat{p}(1-x)-\hat{p}'y+m\right)\gamma^\nu}{\left[m^2(x+y)-p^2x(1-x)-p'^2y(1-y)+2pp'xy\right]^{2-D/2}} \quad (37)$$

Koncepcia renormalizácie.

Z Wardovej identity, ktorá sleduje zo zachovania prúdu v QED, vyplýva, že z jedno-slučkových diagramov (2. rád poruchovej metódy) len polarizácia vákua prispieva k zmene náboja (k zmene väzbovej konštanty vo vertexe). Predpokladajme, že náboj meriame v Thompsonovom rozptyle ($q^2 \approx 0$)

$\sigma_{thomp} \sim$



Potom amplitúdu tohoto procesu v 2. ráde poruchovej metódy dostaneme z amplitúdy prvého rádu poruchovej metódy zámenou vyplyvajúcou z modifikácie propagátora

$$ie\gamma^{\mu} \rightarrow ie\left[1 - \frac{1}{2}\Pi^{\gamma}(0)\right]\gamma^{\mu} \tag{38}$$

Teda v účinnom priereze pre Thompsonov rozptyl nám vystupuje veličina $e\left[1 - \frac{1}{2}\Pi^{\gamma}(0)\right]$ – ona predstavuje fyzikálny náboj (e_{phys}) a nie veličina, ktorá je v Lagranžiáne. Preto veličinu, ktorá „sedí" v Lagranžiáne budeme označovať ako e_0 a nazývať „holý" náboj. Ak fyzikálny náboj (e_{phys}), budeme ho ďalej označovať ako e, meriame pri $q^2 \approx 0$, potom vzťah holého (e_0) a fyzikálneho náboja (e) je:

$$e_0 = e + \delta e = e\left[1 + \frac{1}{2}\Pi^{\gamma}(0)\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta e}{e} = \frac{1}{2}\Pi^{\gamma}(0) \tag{39}$$

Recept pre renormalizačnú procedúru je nasledovný: fyzikálny náboj v Lagranžiáne nahradíme holým nábojom: $e \rightarrow e_0 = e + \delta e$ a uskutočníme perturbatívny rozvoj v δe.

Uvažujme rozptylový alebo anihilačný proces, ktorý ide cez fotónovú výmenu, v jedno-slučkovom priblížení. Amplitúda rozptylu (bez externých fermiónových spinórov) je:

$$\frac{e_0^2}{q^2}\left[1-\frac{1}{2}\Pi^{\gamma}(q^2)\right]^2=\frac{e^2}{q^2}\left[1+2\frac{\delta e}{e}-\Pi^{\gamma}(q^2)\right]=\frac{e^2}{q^2}\left[1+\Pi^{\gamma}(0)-\Pi^{\gamma}(q^2)\right]$$
$$=\frac{e^2}{q^2}\left[1-\hat{\Pi}^{\gamma}(q^2)\right] \tag{40}$$

Veličina

$$\hat{\Pi}^{\gamma}(q^2)=\Pi^{\gamma}(q^2)-\Pi^{\gamma}(0) \tag{41}$$

sa nazýva renormalizovaná polarizácia vákua a je konečná aj pre $D \to 4$. Použijúc vzťahy (24) pre malé prenesené hybnosti dostávame ($/q^2/ << m^2$):

$$\hat{\Pi}^{\gamma}(q^2)=\frac{\alpha}{3\pi}\frac{q^2}{5m^2} \tag{42}$$

Pre veľké prenesené hybnosti (25)dostávame ($/q^2/ >> m^2$):

$$\hat{\Pi}^{\gamma}(q^2)=\frac{\alpha}{3\pi}\left(\frac{5}{3}-\ln\left(\frac{-q^2}{5m^2}\right)+i\pi\theta(q^2)\right) \tag{43}$$

Pri veľkých $/q^2/$ k jedno-slučkovej korekcii budú prispievať nielen elektróny, ale aj iné fermióny s nábojom Q_f . Zaujímavý je prípad , keď $-q^2 = M_Z^2$ (M_Z je hmotnosť Z-bozónu):

$$\hat{\Pi}^{\gamma}(M_Z^2)=\sum_f Q_f^2\frac{\alpha}{3\pi}\left(\frac{5}{3}-\ln\left(\frac{M_Z^2}{5m^2}\right)+i\pi\theta(q^2)\right) \tag{44}$$

Totálny fermiónový príspevok k reálnej časti renormalizovaného propagátora je:

$$\mathrm{Re}\,\hat{\Pi}^{\gamma}(M_Z^2)=-0.0602\pm0.0009$$

Polarizácie vákua môže byť uvažovaná buď ako korekcia propagátora buď ako korekcia náboja – v tomto druhom prípade vznika koncepcia bežiaceho náboja resp. bežiacej väzbovej konštanty. Pre bežiaci náboj môžeme presumovať príspevky všetkých rádov (viď. Kap.8 vz.37):

$$e^2(q^2)=\frac{e^2}{1+\mathrm{Re}\,\Pi^{\gamma}(q^2)} \tag{45}$$

čo zodpovedá sumovaniu geometrického radu predstavujúceho rad amplitúd s rôznym počtom slučiek.

Renormalizácia v QED

Závery pre divergentné diagramy zodpovedajúce vlastnej energii elektrónu, vlastnej energii fotónu a vertexovej korekcii môžeme po regularizácii vyjadriť:

$$\Sigma(p) = \frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon}(-\hat{p} + 4m) + \Sigma^{(\text{finit})}(p) \tag{46}$$

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \frac{e^2}{12\pi^2\varepsilon}(-g_{\mu\nu}q^2 + q_\mu q_\nu) + \Pi_{\mu\nu}^{(finit)}(p) \tag{47}$$

$$\Lambda_\mu(p,q,p') = \frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon}\gamma_\mu + \Lambda_\mu^{(finit)}(p,q,p') \tag{48}$$

K diagramom (46-47) sme sa dostali vychádzajúc z lagranžiánu QED:

$$L_{QED} = \underbrace{\bar{\psi}(i\hat{\partial} - m)\psi}_{L_f} \underbrace{- eQA^\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi}_{L_i} \underbrace{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left(\partial_\mu A^\mu\right)}_{L_\gamma} \tag{49}$$

Prítomnosť divergentných častí v (46-48) znamená, že veličiny ψ, m, e, A_μ vystupujúce v L_{QED} nie sú fyzikálne pozorovanými veličinami, ale nejakými inými veličinámi – budeme ich nazývať „holými" a pripíšeme im index *0*. Ich vzťah k fyzikálnym veličinám si vyjadríme nasledovne:

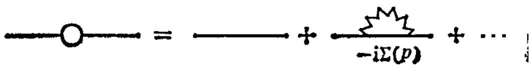
$$\begin{aligned} &\psi_0 = Z_\psi^{1/2}\psi \qquad A_0^\mu = Z_A^{1/2}A_\mu \\ &m_0 = Z_m m \qquad e_0 = Z_e e \end{aligned} \tag{50}$$

Kde veličiny Z_i je možno rozvinúť do Taylorovho radu podľa mocnín kvadrátu fyzikálneho náboja e^2:

$$Z_i = 1 + e^2\delta Z_i \tag{51}$$

Propagátor elektrónu

Keď vychádzame z lagranžiánu L_{QED} (49), potom pre úplný propagátor (dresssed propagator) elektrónu máme:



$$iS_F'(p) = \frac{i}{\hat{p} - m} + \frac{i}{\hat{p} - m}(-i\Sigma(p))\frac{i}{\hat{p} - m} + \cdots = \frac{i}{\hat{p} - m - \Sigma(p)} \tag{52}$$

Efekty slučiek sa prejavia ako dodatok k hmotnosti elektrónu. Problém je však v tom, že ak do L_{QED} vchádzajú fyzikálne veličiny potom, v dôsledku prítomnosti ***Σ(p),*** propagátor obsahuje divergentnú časť. Teraz predpokladajme, že do L_{QED} vchádzajú holé veličiny, ktoré si vyjadríme cez fyzikálne veličiny prostredníctvom vzťahov (50) a (51). Stačí nám uvažovať len fermiónovú časť L_f z lagranžiánu L_{QED}.

$$\left(L_f\right)_0 = \bar{\psi}_0(i\hat{\partial} - m)\psi_0 = (1 + e^2\delta Z_\psi)\bar{\psi}\, i\hat{\partial}\,\psi - (1 + e^2\frac{\delta m}{m} + e^2\delta Z_\psi)m\bar{\psi}\psi \qquad (53)$$

Úplný propagátor vyjadrený cez fyzikálne veličiny dostaneme z (52) zámenou:

$\hat{p} \to \left(1 + e^2\delta Z_\psi\right)\hat{p}$ a $m \to \left(1 + e^2\frac{\delta m}{m} + e^2\delta Z_\psi\right)m$, teda pre úplný propagátor platí:

$$\begin{aligned} S_F'^{-1} &= \left(1 + e^2\delta Z_\Psi\right)\hat{p} - \left(1 + e^2\frac{\delta m}{m} + e^2\delta Z_\Psi\right)m - \Sigma = \\ &= \left(1 + e^2\delta Z_\Psi + \frac{e^2}{8\pi^2\varepsilon}\right)\hat{p} - \left(1 + e^2\frac{\delta m}{m} + e^2\delta Z_\Psi + \frac{e^2}{2\pi^2\varepsilon}\right)m - \Sigma^{(finit)} \end{aligned} \qquad (54)$$

Výrazy pre „holé“ veličiny dostaneme z podmienky konečnosti výrazu (54):

$$\delta Z_\psi = -\frac{1}{8\pi^2\varepsilon}, \qquad \frac{\delta m}{m} + \delta Z_\psi + \frac{1}{2\pi^2\varepsilon} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta m}{m} = -\frac{3}{8\pi^2\varepsilon} \qquad (55)$$

čo vedie k nasledovným vzťahom medzi „holými“ a fyzikálnymi veličinami:

$$\Psi_0 = \sqrt{Z_2} = \left(1 - \frac{e^2}{8\pi^2\varepsilon}\right)\Psi, \qquad m_0 = m + \delta m = \left(1 - \frac{3e^2}{8\pi^2\varepsilon}\right) \qquad (56)$$

A pre úplný propagátor máme:

$$iS_F'(p) = \frac{i}{\hat{p} - m - \Sigma^{(finit)}(p)} \qquad (57)$$

Schémy renormalizácie.

Vo všeobecnosti možno pre polarizáciu vákua napísať:

$$\Pi^\gamma(q^2) = \Delta\Pi_e^\gamma(\mu^2) + \Pi_R^\gamma(q^2/\mu^2) \qquad (54)$$

kde divergentná časť $\Delta\Pi_e^\gamma(\mu^2)$ môže byť reabsorbovaná v renormalizovanú väzbovú konštantu (náboj). Rozloženie (54) môže byť realizované mnohými spôsobmi. Spôsob, ktorý si zvolíme bude definovať renormalizačnú schému:

$$\Delta\Pi_e^\gamma(\mu^2) = \begin{cases} \dfrac{\alpha_0}{3\pi}\mu^{-2\varepsilon}\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-\gamma+\ln(4\pi)+\dfrac{5}{3}\right] & \mu-\text{scheme} \\ \dfrac{\alpha_0}{3\pi}\mu^{-2\varepsilon}\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] & \text{MS}-\text{scheme} \\ \dfrac{\alpha_0}{3\pi}\mu^{-2\varepsilon}\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-\gamma+\ln(4\pi)\right] & \overline{\text{MS}}-\text{scheme} \end{cases} \tag{55}$$

$$\Pi_R(q^2/\mu^2) = \begin{cases} \dfrac{\alpha_0}{3\pi}\left[-\ln\left(\dfrac{-q^2}{\mu^2}\right)\right] & \mu-\text{scheme} \\ \dfrac{\alpha_0}{3\pi}\left[-\ln\left(\dfrac{-q^2}{\mu^2}\right)-\gamma+\ln(4\pi)+\dfrac{5}{3}\right] & \text{MS}-\text{scheme} \\ \dfrac{\alpha_0}{3\pi}\mu^{-2\varepsilon}\left[-\ln\left(\dfrac{-q^2}{\mu^2}\right)+\dfrac{5}{3}\right] & \overline{\text{MS}}-\text{scheme} \end{cases} \tag{56}$$

Použijúc $\alpha = e^2/(4\pi)$ môžeme v QED písať (amplitúda $M(q^2) \sim \dfrac{e^2}{q^2}\{1-\Pi^\gamma(q^2)\}$):

$$\begin{gathered} \frac{\alpha_0}{q^2}\{1-\Delta\Pi_e^\gamma(\mu^2)-\Pi_R^\gamma(q^2/\mu^2)\} \equiv \frac{\alpha_R(\mu^2)}{q^2}\{1-\Pi_R^\gamma(q^2/\mu^2)\}, \\ \alpha_R(\mu^2) = \alpha_0\left\{1+\frac{\alpha_0}{3\pi}\mu^{-2\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon}+C_{scheme}\right)\right\}, \qquad \alpha_0 = \frac{e_0^2}{4\pi} \end{gathered} \tag{57}$$

Kde podobne ako v prípade „cut off“ renormalizácie α_0 je holá väzbová konštanta , ktorá sa priamo nepozoruje. Po redefinícii väzbovej konštanty je amplitúda rozptylu konečná, teda v experimente sa meria renormalizovaná väzbová konštanta α_R.

Doplnok A. Pri výpočte polarizácie vákua , vlastej energie elektrónu či vertexovej funkcie je treba využiť nasledovné vlastnosti stôp súčinov γ-matíc:

$$\begin{aligned} Tr\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right) &= 4g^{\mu\nu} \\ Tr\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\right) &= 4\left[g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}+g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}-g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\right] \\ Tr\left(\gamma_5\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\right) &= 4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \\ Tr\left(\gamma_5\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{A1}$$

a komutačné vzťahy ($\hat{a} \equiv a_{\mu}\gamma^{\mu}$) :

$$\begin{aligned} \hat{a}\hat{b} &= 2(ab)-\hat{b}\hat{a} \\ \hat{a}\gamma^{\mu} &= 2a^{\mu}-\gamma^{\mu}\hat{a} \\ \hat{a}\gamma^{5} &= -\gamma^{5}\hat{a} \end{aligned} \tag{A2}$$

Doplnok B. O výpočte divergentných diagramov.

Integrál zodpovedajúci Feynmanovemu diagramu má štruktúru:

$$I=\int\frac{f(k)dk}{a_1(k)a_2(k)\cdots a_n(k)} \tag{B1}$$

kde $a_i(k)$ sú polynómy druhého stupňa a $f(k)$ je polynóm n-tého stupňa.

Pri výpočte sa využíva :

$$\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}=\int_0^1 dz_1\int_0^{z_1}dz_2\int_0^{z_{n-1}}dz_{n-2}\,\frac{1}{\left[a_1z_{n-1}+a_2(z_{n-1}-z_{n-2})+\cdots+a_n(1-z_1)\right]^n} \tag{B2}$$

Pre n=2:

$$\frac{1}{a_1a_2}=\int_0^1\frac{dz}{\left[a_1z+a_2(1-z)\right]} \tag{B3}$$

Z hľadiska závislosti na k (hybnosť cez, ktorú sa integruje) je treba urobiť zámenu:

$$\frac{1}{\left[a_1z_{n-1}+a_2(z_{n-1}-z_{n-2})+\cdots+a_n(1-z_1)\right]^n}=\frac{c}{\left[(k-a)^2+\alpha\right]^n} \tag{B4}$$

kde c, a, α sú funkcie $z_1,\ldots,z_n$.

Dosadením (B2) do (B1) dostávame:

$$I=(n-1)!\int_0^1 dz_1\cdots\int_0^{z_{n-2}}dz_{n-1}J(z_1,\ldots,z_{n-1}) \tag{B5}$$

kde

$$J(z_1,\cdots z_{n-1}) = \int dk \frac{f(k)}{\left[(k-a)^2+b\right]^n} \tag{B6}$$

Pre výpočet vyšších rádov je dostatočné poznať integrál (dimenzionálna regularizácia):

$$J_\alpha\left(M^2\right) = \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{1}{\left(k^2-M^2\right)^\alpha} = (-1)^\alpha i \frac{\Gamma(\alpha - D/2)}{(4\pi)^{D/2}\,\Gamma(\alpha)} \left(M^2\right)^{\frac{D}{2}-\alpha} \tag{B7}$$

Všeobecný prípad skalárneho integrálu (viď ďalej) zámenou $k \rightarrow k{+}p$ pretransformujeme na prípad $J_\alpha(M^2)$:

$$J_\alpha\left(p,M^2\right) = \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{1}{\left(k^2+2kp-M^2\right)^\alpha} = (-1)^\alpha i \frac{\Gamma(\alpha - D/2)}{(4\pi)^{D/2}\,\Gamma(\alpha)} \left(M^2+p^2\right)^{\frac{D}{2}-\alpha} \tag{B8}$$

Diferencujúc obe strany B8 podľa p^μ dostávame:

$$\int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu}{\left(k^2+2kp-M^2\right)^\alpha} = (-1)^\alpha i\, p_\mu \frac{\Gamma(\alpha - D/2)}{(4\pi)^{D/2}\,\Gamma(\alpha)} \left(M^2+p^2\right)^{\frac{D}{2}-\alpha} \tag{B9}$$

Prediferencovaním oboch strán (B9) podľa p^ν dostávame:

$$\int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k_\nu}{\left(k^2+2kp-M^2\right)^\alpha} =$$

$$= (-1)^\alpha i \frac{\left(M^2+p^2\right)^{\frac{D}{2}-\alpha}}{(4\pi)^{D/2}\,\Gamma(\alpha)} \left[p_\mu p_\nu \Gamma\left(\alpha - \frac{D}{2}\right) + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(p^2+M^2\right) \Gamma\left(\alpha - 1 - \frac{D}{2}\right) \right] \tag{B10}$$

$$\xrightarrow[p=0]{} \quad (-1)^\alpha \frac{i}{2} g^{\mu\nu} \frac{\Gamma\left(\alpha - 1 - \frac{D}{2}\right)}{(4\pi)^{D/2}\,\Gamma(\alpha)} \left(M^2\right)^{\frac{D}{2}-\alpha+1}$$

Doplnok C. Rozmerová analýza

Uvažujme fyzikálny systém v D-rozmernom priestore. Nech Λ je jednotka hybnosti , potom účinok musí byť bezrozmerná veličina:

$$\left[\int d^Dx \cdot L(x)\right] = \Lambda^0 \quad \Rightarrow \quad [L] = \Lambda^D \quad \left(\left[d^Dx\right] = \Lambda^{-D}\right) \tag{C1}$$

Skalárne pole:

$$\left[\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi\right] = \Lambda^D \quad \Rightarrow \quad [\varphi] = \Lambda^{\frac{D-2}{2}} \tag{C2}$$

Spinorové pole:

$$\left[\bar{\psi}\not{\partial}\psi\right] = \Lambda^{D} \quad \Rightarrow \quad \left[\psi\right] = \Lambda^{\frac{D-1}{2}} \qquad \text{C3}$$

Elektromagnetické pole:

$$\left[F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}\right] = \left[\partial_{\mu}A_{\nu}\partial^{\mu}A^{\nu}\right] = \Lambda^{D} \quad \Rightarrow \quad \left[A\right] = \Lambda^{\frac{D-2}{2}} \qquad \text{C4}$$

Interakčný člen:

$$\left[e\bar{\psi}\not{A}\psi\right] = \Lambda^{D} \quad \Rightarrow \quad \left[e\right] = \Lambda^{\frac{4-D}{2}} \qquad \text{C5}$$

Ak predpokladáme $D=4-\varepsilon$ a v interakčnom člene urobíme zámenu: $e \rightarrow e\mu^{\frac{4-D}{2}} = e\mu^{\frac{\varepsilon}{2}}$, potom náboj e si zachová bezrozmernosť.